УДК 539.377

И. Н. Махоркин

ТЕРМОУПРУГОСТЬ ШАРА С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Рассмотрим однородный изотропный шар радиуса R, внешняя поверхность которого в начальный момент времени подвергается действию теплового потока постоянной плотности q. Пусть начальная температура шара равна нулю, а поверхность $r = R$ свободна от внешней нагрузки. В случае, когда физико-механические характеристики материала шара зависят от температуры, для определения температурного поля $t\,(r,\,\tau)$, радиального перемещения U и компонентов напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$ имеем уравнения [2]

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial r}\right] = c_v(t)\frac{\partial t}{\partial \tau}, \tag{1}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2G(t)}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial U}{\partial r} + 2\nu\frac{U}{r} - (1+\nu)\Phi\right], \tag{2}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{2G(t)}{1-2\nu}\left[\nu\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} - (1+\nu)\Phi\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + 2\,\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \tag{3}$$

и краевые условия

$$U|_{r=0} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\left[\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial r}\right]\right|_{r=R} = qS_+(\tau), \tag{5}$$

$$t\,(r,\,0) = 0, \quad \sigma_{ii}\,(r,\,0) = 0, \quad U\,(r,\,0) = 0, \tag{6}$$

где $S_+(\tau) = \begin{cases}1, \tau > 0\\ 0, \tau \leqslant 0\end{cases}$; $G\,(t)$ — модуль сдвига; $\nu = \mathrm{const}$ — коэффициент Пуассона; $\alpha_t\,(t)$ — коэффициент линейного расширения; $\lambda_t\,(t)$ — коэффициент теплопроводности; $c_v\,(t)$ — объемная теплоемкость; $\Phi = \int\limits_0^t \alpha_t\,(\zeta)\,d\zeta$.

Аналитическое решение нелинейного уравнения (1) при условиях (5) — (6) сопряжено со значительными трудностями. Однако в случае материалов, для которых с удовлетворительной точностью можно считать, что коэффициент температуропроводности $a = \dfrac{\lambda_t(t)}{c_v(t)} \approx \mathrm{const}$, задача значительно упрощается посредством внедрения переменной Кирхгофа

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda_t^{(0)}}\int\limits_0^t \lambda_t(\zeta)\,d\zeta, \tag{7}$$

где $\lambda_t^{(0)}$ — опорный коэффициент теплопроводности материала. При этом вместо (1), (5), (6) соответственно получим

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2\frac{\partial\vartheta^*}{\partial\rho}\right] = \frac{\partial\vartheta^*}{\partial \mathrm{Fo}}, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta^*}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\vartheta^*}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} = \mathrm{Ki}S_+(\mathrm{Fo}), \tag{9}$$

$$\vartheta^*(\rho,\,0) = 0, \tag{10}$$

где $\mathrm{Ki} = \dfrac{qR}{\lambda_t^{(0)}t_0}$ — критерий Кирпичева; t_0 — некоторая опорная температура; $\vartheta^* = \int\limits_0^{t^*}\lambda_t^*(\zeta)\,d\zeta$; $t^* = \dfrac{t}{t_0}$; $\mathrm{Fo} = \dfrac{a\tau}{R^2}$; $\lambda_t^*(t^*) = \dfrac{\lambda_t(t)}{\lambda_t^{(0)}}$; $\rho = \dfrac{r}{R}$.

Решение краевой задачи (8) — (10) имеет вид [1]

$$\vartheta^* = \mathrm{Ki}\left[3\mathrm{Fo} - \frac{3-5\rho^2}{10} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2\cos\mu_n}\,\frac{\sin\mu_n\rho}{\mu_n\rho}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})\right], \tag{11}$$

где μ_n — корни характеристического уравнения

$$\mathrm{tg}\,\mu = \mu.$$

Если коэффициент теплопроводности изменяется в зависимости от температуры по линейному закону [3]

$$\lambda_t = \lambda_t^{(0)}(1 \pm kt), \tag{12}$$

то из (7) с учетом (12) получим

$$t = \pm\frac{1}{k}\left(\sqrt{1 \pm 2k\vartheta} - 1\right), \tag{13}$$

где k — температурный коэффициент теплопроводности.

Зная выражение переменной Кирхгофа, по формуле (13) нетрудно определить температурное поле в шаре. В нашем случае оно имеет вид

$$t^* = \pm\frac{1}{k_1}\times$$

$$\times\left\{\sqrt{1 \pm 2k_1\mathrm{Ki}\left[3\mathrm{Fo} - \frac{3-5\rho^2}{10} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_n\rho}{\rho\mu_n^3\cos\mu_n}\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo})\right]} - 1\right\}, \tag{14}$$

где $k_1 = kt_0$.

Для определения напряженно-деформированного состояния шара, обусловленного нестационарным температурным полем (14), имеем соотношение (2), уравнение (3), краевые условия (4), (6), которые в безразмерном виде запишутся так:

$$\sigma_r = G^*(t^*)\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial\rho} + 2\nu\frac{u}{\rho} - (1-\nu)\Phi^*\right], \tag{15}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = G^*(t^*)\left[\nu\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{u}{\rho} - (1-\nu)\Phi^*\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 u)\right] + \frac{1}{G^*(t^*)}\frac{\partial G^*}{\partial\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{2\nu}{1-\nu}\frac{u}{\rho} - \Phi^*\right] - \frac{\partial\Phi^*}{\partial\rho} = 0, \tag{16}$$

$$u|_{\rho=0} = 0, \quad \sigma_r|_{\rho=1} = 0, \tag{17}$$

где

$$u = \frac{U}{R\alpha_t^{(0)}t_0}; \quad \sigma_i = \frac{1-2\nu}{2G_0\alpha_t^{(0)}\,t_0}\sigma_{it} \qquad (i = r,\ \varphi,\ \theta);$$

$$\Phi^* = \frac{1+\nu}{1-\nu}\int_0^{t^*}\alpha_t^*(\eta)\,d\eta; \quad t^* = \frac{t}{t_0}; \quad \alpha_t^*(t^*) = \frac{\alpha_t(t)}{\alpha_t^{(0)}};$$

$$G^*(t^*) = \frac{G(t)}{G_0}; \quad \rho = \frac{r}{R};$$

G_0, $\alpha_t^{(0)}$ — опорный модуль сдвига и опорный температурный коэффициент линейного расширения.

Краевую задачу (15) — (17) решим методом последовательных приближений, основанном на малости фиксированного параметра ε, определяемого из равенства [2]

$$\frac{1}{G^*(t^*)}\frac{\partial G^*}{\partial\rho} = \varepsilon\psi(t^*). \tag{18}$$

Величины u и σ_i ($i = r, \varphi, \theta$) будем искать в виде

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n, \quad \sigma_i = \sigma_i^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_i^{(n)}. \tag{19}$$

Вопрос о сходимости этих рядов рассмотрен в работе [2].

Для нулевого и n-го ($n = 1, 2, 3, \ldots$) приближения граничные задачи запишутся соответственно в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 u_0)\right] = \frac{\partial\Phi^*}{\partial\rho}, \\
\sigma_r^{(0)} = G^*\left[(1-\nu)\frac{\partial u_0}{\partial\rho} + 2\nu\frac{u_0}{\rho} - (1-\nu)\Phi^*\right], \\
\sigma_\varphi^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)} = G^*\left[\nu\frac{\partial u_0}{\partial\rho} + \frac{u_0}{\rho} - (1-\nu)\Phi^*\right], \\
u_0|_{\rho=0} = 0, \quad \sigma_r^{(0)}|_{\rho=1} = 0;
\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 u_n)\right] = -\frac{\sigma_r^{(n-1)}}{(1-\nu)G^*}\psi, \\
\sigma_r^{(n)} = G^*\left[(1-\nu)\frac{\partial u_n}{\partial\rho} + 2\nu\frac{u_n}{\rho}\right], \\
\sigma_\varphi^{(n)} = \sigma_\theta^{(n)} = G^*\left[\nu\frac{\partial u_n}{\partial\rho} + \frac{u_n}{\rho}\right], \\
u_n|_{\rho=0} = 0, \quad \sigma_r^{(n)}|_{\rho=1} = 0.
\end{gathered} \tag{21}$$

Решение задачи для нулевого приближения имеет вид

$$\begin{gathered}
u_0 = \frac{H(\rho)}{\rho^2} + \frac{2(1-2\nu)}{1+\nu}\rho H(1), \\
\sigma_r^{(0)} = \frac{2(2\nu-1)G^*}{\rho^3}[H(\rho) - \rho^3 H(1)], \\
\sigma_\varphi^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)} = (2\nu-1)G^*[\Phi^* - 3H(1)] - \frac{\sigma_r^{(0)}}{2},
\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$H(\rho) = \int_0^\rho \rho^2\Phi^* d\rho.$$

Решение задачи, соответствующей первому приближению, будет таким:

$$\begin{gathered}
u_1 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2(1-2\nu)}{(1-\nu)\rho^2}K(\rho) + D_1\rho\right], \\
\sigma_r^{(1)} = \frac{G^*}{\varepsilon}\left[\frac{4(1-2\nu)^2}{(\nu-1)\rho^3}K(\rho) + 2(1-2\nu)F(\rho) + (1+\nu)D_1\right], \\
\sigma_\varphi^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = \frac{G^*}{\varepsilon}\left[\frac{2(1-2\nu)^2}{(1-\nu)\rho^3}K(\rho) + \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}F(\rho) + (1+\nu)D_1\right],
\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$D_1 = \frac{1}{1+\nu}\left[\frac{4(1-2\nu)^2}{1-\nu}K(1) - 2(1-2\nu)F(1)\right];$$

$$F(\rho) = \int_0^\rho \frac{H(\rho) - \rho^3 H(1)}{\rho^3 G^*}\frac{\partial G^*}{\partial\rho}d\rho; \quad K(\rho) = \int_0^\rho \rho^2 F d\rho.$$

Если физико-механические характеристики изменяются в зависимости от температуры в виде [2, 3]

$$\lambda_t^* = 1 - k_1 t^*, \quad \alpha_t^* = 1 + \gamma t^*, \quad G^* = 1 - \beta t^{*2},$$

а температурное поле имеет вид (14), то решение для нулевого приближения (20) записывается в следующем виде:

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{2(2\nu-1)(1+\nu)G^*}{(1-\nu)\rho^3}\left\{\frac{\gamma}{k_1}\left[0{,}1\mathrm{Ki}\rho^3(1-\rho^2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{Ki}}{\mu_n^4\cos\mu_n}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\sin\mu_n\rho}{\mu_n}-\rho\cos\mu_n\rho\right)\right]+\frac{k_1+\gamma}{k_1}\left[\int_0^\rho\eta^2t^*d\eta-\rho^3\int_0^1\eta^2t^*d\eta\right]\right\},$$

$$\sigma_\varphi^{(0)}=\sigma_\theta^{(0)}=\frac{(2\nu-1)(1+\nu)G^*}{1-\nu}\left[t^*\left(1+\frac{\gamma}{2}t^*\right)+\frac{3\gamma\mathrm{KiFo}}{k_1}-\right.$$

$$\left.-\frac{3(k_1+\gamma)}{k_1}\int_0^1\eta^2t^*d\eta\right]-\frac{\sigma_r^{(0)}}{2}, \qquad (24)$$

где $k_1 = 0{,}132$; $\gamma = 0{,}554$; $\beta = 0{,}125$; $\nu = 0{,}4$.

По формулам (24) при $\rho = 0$, $\mathrm{Ki} = 1$, $\mathrm{Fo} = 0{,}4$ произведены расчеты температурных напряжений в термочувствительной сфере. При этом $\sigma_r^{(0)}|_{\rho=0} = 0{,}121$; $\sigma_\varphi^{(0)}|_{\rho=0} = \sigma_\theta^{(0)}|_{\rho=0} = 0{,}213$. Значения этих напряжений для нетермочувствительной сферы соответственно равны 0,097 и 0,19. Последующие приближения практически не оказывают влияния на величину температурных напряжений в центре сферы. Таким образом, учет зависимости физико-механических характеристик материала от температуры приводит к увеличению радиальных и кольцевых напряжений в центре сферы соответственно на 25 и 12%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
2. *Новинский А.* Задача о переходной термоупругости бесконечной среды со сферической полостью и свойствами, зависящими от температуры.— Прикл. математика, 1962, **29**, № 2, с. 197—205.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., «Наук. думка», 1972. 308 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.I 1977 г.

УДК 539.370

Т. Л. Мартынович, М. К. Зварич, В. С. Щукин

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ-ПЛАСТИНКИ, В ОТВЕРСТИЕ КОТОРОЙ ВПРЕССОВАН УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ

Рассмотрим упругое равновесие анизотропной балки-пластинки шириной $2h_0$, толщиной $2h$ и длиной l, ослабленную круговым отверстием радиуса r_1, в которое впрессовано упругое изотропное кольцо (стержень) постоянного сечения, симметричного относительно срединной плоскости пластинки xoy. Предполагаем, что пластинка имеет в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости xoy. Контакт между телами осуществляется вдоль всего контура отверстия L. Трением между пластинкой и кольцом пренебрегаем. Напряженно-деформированное состояние кольца описывается теорией тонких криволинейных стержней.

При определении напряженного состояния в контактирующих телах будем исходить из граничных условий в интегральной форме [2]. В этом случае задача сводится к нахождению функций $\Phi_j(z_j)$ комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$, аналитических в областях S_j ($j = 1, 2$) [1, 3], и компонент деформации стержня e_0 и θ_b.