ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. К., «Наук. думка», 1974. 270 с.
2. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И.* Сферические днища, ослабленные отверстиями. К., «Наук. думка», 1970. 322 с.
3. *Швец Р. Н., Павленко В. Д., Матковский А. П.* Квазистатическая задача термоупругости для тонких оболочек с круговым отверстием.— Докл. АН УССР. Сер. А, № 4, с. 349—353.
4. *Швец Р. Н., Павленко В. Д., Синишин Л. В.* Температурные напряжения в сферической оболочке с кольцом равных круговых отверстий.— Пробл. прочности, 1974, № 6, с. 8—12.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.IX 1976 г.

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, В. З. Дидык

УСТАНОВИВШИЕСЯ НАПРЯЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ТЕПЛООБМЕНОМ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЛОКАЛЬНЫМ НАГРЕВОМ

Пусть тонкая бесконечная круговая цилиндрическая оболочка нагревается по кольцевой области $|\alpha| \leqslant b$ внутренними источниками тепла мощностью q_0 или внешней средой температуры $t_0 = \mathrm{const}$. Через поверхности $\gamma = \pm\,\delta$ оболочки осуществляется теплообмен с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона. Предположим, что температура оболочки на бесконечности исчезает.

Для определения установившегося температурного поля в оболочке имеем уравнение теплопроводности [1, 2]

$$T'' - [\varkappa_-^2 + \varkappa N(\alpha)]\,T = -\frac{q}{\lambda} N(\alpha), \tag{1}$$

где

$$T' = \frac{dT}{d\alpha}; \quad \varkappa_\pm^2 = \frac{\alpha^\pm}{\lambda\delta}; \quad \varkappa = \varkappa_+^2 - \varkappa_-^2;$$

$N(\alpha) = S_-(\alpha + b) - S_+(\alpha - b)$, $S_\pm(\eta)$ — асимметричные единичные функции; λ, α^+, α^- — соответственно коэффициенты теплопроводности, теплоотдачи с поверхностей области нагрева и за ее пределами; $q = q_0$ при нагреве внутренними источниками тепла; $q = t_0\alpha^+/\delta$ при нагреве внешней средой.

Температурное поле в оболочке находим таким образом. Умножая уравнение (1) на $N(\alpha)$, вводя замену

$$U = TN(\alpha) \tag{2}$$

и учитывая равенства

$$S_\pm(\alpha - \alpha_i)\, S_\pm(\alpha - \alpha_j) = S_\pm(\alpha - \alpha_{\max i,j}), \tag{3}$$

$$f(\alpha)\,\delta_\pm'(\alpha) = f(0)\,\delta_\pm'(\alpha) - f'(0)\,\delta_\pm(\alpha), \tag{4}$$

получаем уравнение с постоянными коэффициентами относительно U:

$$U'' - \varkappa_+^2 U = T_- - T_+ - \frac{q}{\lambda} N(\alpha), \tag{5}$$

где

$$T_\mp = T(\mp 2b - \alpha)\,\delta_\mp'(\alpha \pm b); \quad \delta_\pm(\eta) = \frac{d}{d\eta} S_\pm(\eta).$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$U = Ae^{-\varkappa_+\alpha} + Be^{\varkappa_+\alpha} + P_- - P_+, \tag{6}$$

где

$$P_\mp = \frac{1}{\varkappa_+}\left\{\frac{d}{d\xi}[T(\mp 2b - \xi)\,\mathrm{sh}\,\varkappa_+(\xi - \alpha)]\,|_{\xi=\mp b} + \right.$$

$$\left. + \frac{q}{\lambda\varkappa_+}[1 - \mathrm{ch}\,\varkappa_+(\alpha \pm b)]\right\} S_\mp(\alpha \pm b).$$

Из равенства (2) следует, что $U \equiv 0$ при $\alpha < -b$. Следовательно, в выражении (6) $A = B = 0$. На основании (2), (6) уравнение (1) сводится к частично вырожденному уравнению вида

$$T'' - \varkappa_-^2 T = \varkappa(P_- - P_+) - \frac{q}{\lambda}N(\alpha). \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7), являющееся общим решением уравнения (1), ищем в виде

$$T = C_1'\,\mathrm{ch}\,\varkappa_-\alpha + C_2'\,\mathrm{sh}\,\varkappa_-\alpha + R_- - R_+, \tag{8}$$

где

$$R_\mp = P_\mp - \frac{d}{\varkappa_- d\xi}[T(\mp 2b - \xi)\,\mathrm{sh}\,\varkappa_-(\xi - \alpha)]\,|_{\xi=\mp b} S_\mp(\alpha \pm b).$$

Определив $T(\mp b)$, $T'(\mp b)$ из (8), учтя, что температура оболочки на бесконечности исчезает, получим общее решение задачи теплопроводности для рассматриваемой оболочки:

$$T = \frac{q}{\lambda\varkappa_+^2 k_1}\langle k_2\{e^{\varkappa_-(\alpha+b)}[1 - S_-(\alpha + b)] +$$

$$+ e^{-\varkappa_-(\alpha-b)}S_+(\alpha - b)\} + (k_1 - k_3\,\mathrm{ch}\,\varkappa_+\alpha)N(\alpha)\rangle, \tag{9}$$

где

$$k_1 = 2\,\mathrm{ch}\,2b\varkappa_+ + \frac{\varkappa_+^2 + \varkappa_-^2}{\varkappa_+\varkappa_-}\,\mathrm{sh}\,2b\varkappa_+;$$

$$k_2 = \mathrm{ch}\,2b\varkappa_+ + \frac{\varkappa_+}{\varkappa_-}\,\mathrm{sh}\,2b\varkappa_+ - 1; \quad k_3 = 2\left(\mathrm{ch}\,b\varkappa_+ + \frac{\varkappa_-}{\varkappa_+}\,\mathrm{sh}\,b\varkappa_+\right).$$

Если α^+ положить равным α^-, то температурное поле (9) запишем так:

$$T = \frac{q}{\lambda\varkappa_-^2}\{e^{\varkappa_-\alpha}\,\mathrm{sh}\,b\varkappa_- + [1 - \mathrm{ch}\,\varkappa_-(\alpha + b)]S_-(\alpha + b) -$$

$$- [1 - \mathrm{ch}\,\varkappa_-(\alpha - b)]S_+(\alpha - b)\}. \tag{10}$$

Произведя в (9) и (10) замену $\alpha' = \alpha + b$ и перейдя затем к пределу при $b \to \infty$, найдем температурное поле в бесконечной оболочке, нагреваемой по области $\alpha' \geqslant 0$, соответственно при $\alpha^+ \neq \alpha^-$, $\alpha^+ = \alpha^-$:

$$T = \frac{q}{\lambda\varkappa_+^2}\left\{\frac{\varkappa_+}{\varkappa_+ + \varkappa_-}e^{\varkappa_-\alpha'} + \left[1 - \frac{1}{\varkappa_+ + \varkappa_-}(\varkappa_+ e^{\varkappa_-\alpha'} + \varkappa_- e^{-\varkappa_+\alpha'})\right]S_-(\alpha')\right\}, \tag{11}$$

$$T = \frac{q}{\lambda\varkappa_-^2}\left[\frac{1}{2}e^{\varkappa_-\alpha'} + (1 - \mathrm{ch}\,\varkappa_-\alpha')\,S_-(\alpha')\right]. \tag{12}$$

Температурные напряжения в оболочке определяем по известным [2] формулам

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2\delta}\left(N_1 + 3\frac{\gamma}{\delta^2}M_1\right), \quad \sigma_{\beta\beta} = \frac{1}{2\delta}\left(N_2 + 3\frac{\gamma}{\delta^2}M_2\right), \tag{13}$$

где

$$N_1 = \frac{2E\delta}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{d\alpha} + \nu\frac{w}{R} - (1+\nu)\alpha_t T\right], \quad M_1 = -\frac{2E\delta^3}{3(1-\nu^2)}\frac{d^2w}{d\alpha^2};$$

$$N_2 = \frac{2E\delta}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{du}{d\alpha} + \frac{w}{R} - (1+\nu)\alpha_t T\right], \quad M_2 = \nu M_1; \qquad (14)$$

R — радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; α_t — температурный коэффициент линейного расширения; компоненты вектора перемещений u, w определяются из уравнения

$$\frac{d^4w}{d\alpha^4} + 4n^4(w - \alpha_t RT) + \frac{3\nu}{\delta^2R^2}A_{10} = 0, \quad n^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{4\delta^2R^2} \qquad (15)$$

и равенства

$$u = \int\left[(1+\nu)\alpha_t T - \nu\frac{w}{R}\right]d\alpha + A_{10}\frac{\alpha}{R} + A'_{40}. \qquad (16)$$

Решение уравнения (15) ищем в виде

$$w = (C_1\cos n\alpha + C_2\sin n\alpha)e^{n\alpha} + (C_3\cos n\alpha + C_4\sin n\alpha)e^{-n\alpha} +$$
$$+ \frac{\alpha_t Rn}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi)e^{-n|\alpha-\xi|}[\sin n|\alpha-\xi| + \cos n(\alpha-\xi)]\,d\xi - \frac{\nu}{1-\nu^2}A_{10}. \qquad (17)$$

Удовлетворив граничным условиям

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\{N_1, N_2, M_1\} = 0, \qquad (18)$$

получим общее решение уравнения (15) для бесконечной цилиндрической оболочки:

$$w = \frac{\alpha_t Rn^2q}{\lambda k_1\varkappa_+^2}\Big\langle\frac{k_2}{2n^2}[(1-l^-)\,\mathrm{sign}_-(\alpha+b) - (1-l^+)\,\mathrm{sign}_+(\alpha-b)] +$$
$$+ k_2\varkappa^-\{4n^2\varkappa_-^{-2}S_1 - f_1^-(k^-, l^-, b) + \varphi_1(k^-, l^-, b) + f_1^+(k^+, l^+, -b) +$$
$$+ \varphi_1(k^+, l^+, -b)\} - k_3\varkappa^+\{4n^2\varkappa_+^{-2}\,\mathrm{ch}\,\varkappa_+\alpha N(\alpha) + \mathrm{ch}\,b\varkappa_+[f_2^-(k^-, l^-, b) -$$
$$- f_2^+(k^+, l^+, -b)] + \mathrm{sh}\,b\varkappa_+[\varphi_2(k^-, l^-, b) - \varphi_2(k^+, l^+, -b)]\}\Big\rangle, \qquad (19)$$

где

$$f_i^\mp(k^\mp, l^\mp, \pm b) = \left(k^\mp - \frac{2n^2}{\tilde\varkappa^2}l^\mp\right)\mathrm{sign}_\mp(\alpha\pm b);$$

$$\varphi_i(k^\mp, l^\mp, \pm b) = \frac{2n^2+\tilde\varkappa^2}{2n\tilde\varkappa}k^\mp - \frac{2n^2-\tilde\varkappa^2}{2n\tilde\varkappa}l^\mp, \quad \tilde\varkappa = \begin{cases}\varkappa_-, & i=1\\ \varkappa_+, & i=2\end{cases};$$

$$S_1 = e^{\varkappa_-(\alpha+b)}[1 - S_-(\alpha+b)] + e^{-\varkappa_-(\alpha-b)}S_+(\alpha-b);$$

$$k^\mp \equiv k^\mp(\pm b) = e^{-n|\alpha\pm b|_\mp}\sin n|\alpha\pm b|_\mp, \quad \varkappa^\mp = \frac{\varkappa_\mp^2}{4n^4+\varkappa_\mp^4};$$

$$l^\mp \equiv l^\mp(\pm b) = e^{-n|\alpha\pm b|_\mp}\cos n|\alpha\pm b|_\mp.$$

Подставляя (19), (16) в (14) и полученный результат в (13), находим выражения температурных напряжений в рассматриваемой бесконечной оболочке:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{Q}{k_1\varkappa_+^2}\Big\langle\frac{k_2}{2n^2}[k^-\,\mathrm{sign}_-(\alpha+b) - k^+\,\mathrm{sign}_+(\alpha-b)] -$$
$$- k_2\varkappa^-\{2S_1 + f_1^-(l^-, -k^-, b) - \varphi_1(l^-, -k^-, b) - f_1^+(l^+, -k^+, -b) -$$

$$-\varphi_1(l^+, -k^+, -b)] + k_3\varkappa^+\{2\operatorname{ch}\varkappa_+\alpha N(\alpha) - \operatorname{ch}b\varkappa_+[f_2^-(l^-, -k^-, b) -$$
$$- f_2^+(l^+, -k^+, -b)] - \operatorname{sh}b\varkappa_+[\varphi_2(l^-, -k^-, b) + \varphi_2(l^+, -k^+, -b)]\}\Big\rangle, \tag{20}$$

$$\sigma_{\beta\beta} = \frac{Q_1 n^2}{k_1\varkappa_+^2}\Big\langle\frac{k_2}{2n^2}[l^+\operatorname{sign}_+(\alpha - b) - l^-\operatorname{sign}_-(\alpha + b)] -$$
$$- k_2\varkappa^-[n^{-2}\varkappa_-^2 S_1 + f_1^-(k^-, l^-, b) - \varphi_1(k^-, l^-, b) - f_1^+(k^+, l^+, -b) -$$
$$- \varphi_1(k^+, l^+, -b)] + k_3\varkappa^+\{n^{-2}\varkappa_+^2\operatorname{ch}\varkappa_+\alpha N(\alpha) - \operatorname{ch}b\varkappa_+[f_1^-(k^-, l^-, b) -$$
$$- f_1^+(k^+, l^+, -b)] - \operatorname{sh}b\varkappa_+[\varphi_1(k^-, l^-, b) + \varphi_1(k^+, l^+, -b)]\}\Big\rangle + \nu\sigma_{\alpha\alpha},$$

где

$$Q = \frac{2Q_1Rn^4\gamma}{1 - \nu^2}; \quad Q_1 = \frac{\alpha_t Eq}{\lambda}.$$

В случае $\alpha^+ = \alpha^-$ температурные напряжения (20) приведем к виду

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{Q}{2(4n^4 + \varkappa_-^4)}\left\{4S_2 + \frac{\varkappa_-^2}{n^2}[f_1^-(k^-, l^-, b) - f_1^+(k^+, l^+, -b)]\right\},$$
$$\sigma_{\beta\beta} = Q_1\varkappa^-\left\{S_2 - \frac{1}{2}[f_1^-(l^-, -k^-, b) - f_1^+(l^+, -k^+, b)]\right\} + \nu\sigma_{\alpha\alpha}, \tag{21}$$

где

$$S_2 = \operatorname{ch}\varkappa_-(\alpha + b)S_-(\alpha + b) - \operatorname{ch}\varkappa_-(\alpha - b)S_+(\alpha - b) - \operatorname{sh}b\varkappa_- e^{\varkappa_-\alpha}.$$

Обусловленные температурными полями (11), (12) напряжения запишутся соответственно в виде

$$\sigma_\alpha = M\operatorname{Bi}_1\left\{\operatorname{Bi}^-\left[2S^- + \frac{\operatorname{Bi}_-}{2N^2}f_1^-(K^-, L^-, 0) + \varphi_1(L^-, -K^-, 0)\right] +\right.$$
$$\left. + \operatorname{Bi}^+\left[2S^+ + \frac{\operatorname{Bi}_+}{2N^2}f_2^-(K^-, L^-, 0) - \varphi_2(L^-, -K^-, 0)\right]\right\},$$
$$\sigma_\beta = M_0N^2\operatorname{Bi}_1\Big\langle\operatorname{Bi}^-\left\{\frac{\operatorname{Bi}_-}{N^2}\left[S^- - \frac{1}{2}f_1^-(L^-, -K^-, 0)\right] - \varphi_1(K^-, L^-, 0)\right\} +$$
$$+ \operatorname{Bi}^+\left\{\frac{\operatorname{Bi}_+}{N^2}\left[S^+ - \frac{1}{2}f_2^-(L^-, -K^-, 0)\right] - \varphi_2(K^-, L^-, 0)\right\}\Big\rangle + \nu\sigma_\alpha; \tag{22}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{M}{4N^4 + \operatorname{Bi}_-^2}\left[S_3 + \frac{\operatorname{Bi}_-}{2N^2}f_1^-(K^-, L^-, 0)\right],$$
$$\sigma_\beta = \frac{1}{2}M_0\operatorname{Bi}^-\sqrt{\operatorname{Bi}_-}\left[S_3 - f_1^-(L^-, -K^-, 0)\right] + \nu\sigma_\alpha, \tag{23}$$

где

$$\mathrm{A} = \frac{\alpha'}{\delta}; \quad \Gamma = \frac{\gamma}{\delta}; \quad \rho = \frac{R}{\delta}; \quad N = n\delta = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{4\rho^2}};$$
$$M = \frac{2M_0\rho N^4\Gamma}{1 - \nu^2}; \quad K^- = e^{-N|\mathrm{A}|_-}\sin N|\mathrm{A}|_-; \quad L^- = e^{-N|\mathrm{A}|_-}\cos N|\mathrm{A}|_-;$$
$$\operatorname{Bi}_\mp = (\varkappa_\mp\delta)^2; \quad \operatorname{Bi}^\mp = \frac{\sqrt{\operatorname{Bi}_\mp}}{4N^4 + \operatorname{Bi}_\mp^2}; \quad \operatorname{Bi}_1 = \frac{\sqrt{\operatorname{Bi}_-}}{(\sqrt{\operatorname{Bi}_-} + \sqrt{\operatorname{Bi}_+})\sqrt{\operatorname{Bi}_+}};$$
$$S^- = e^{\sqrt{\operatorname{Bi}_-}\mathrm{A}}[S_-(\mathrm{A}) - 1]; \quad S^+ = e^{-\sqrt{\operatorname{Bi}_+}\mathrm{A}}S_-(\mathrm{A});$$
$$S_3 = 2\operatorname{ch}\sqrt{\operatorname{Bi}_-}\mathrm{A}S_-(\mathrm{A}) - e^{\sqrt{\operatorname{Bi}_-}\mathrm{A}}; \quad \sigma_i = \sigma_{ii}/\alpha_t Et_0;$$

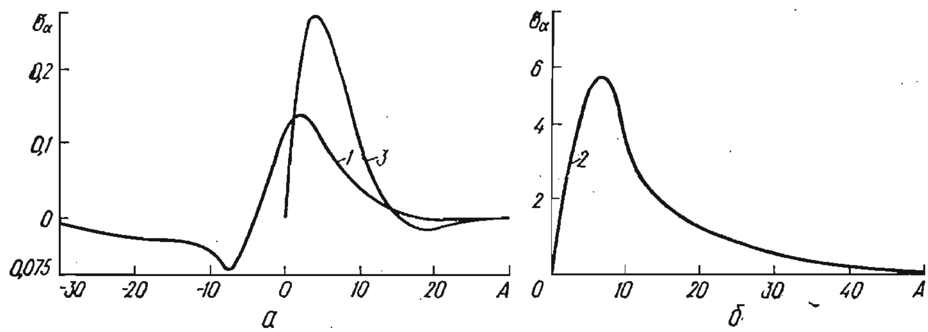

Рис. 1

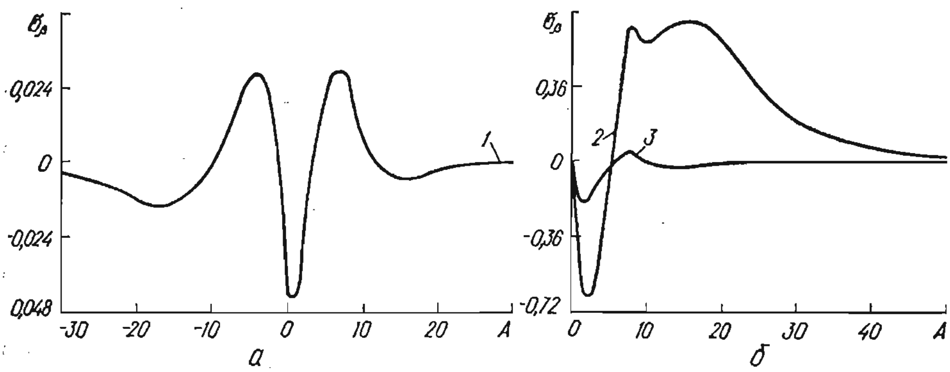

Рис. 2

$M_0 = \mathrm{Bi}_+$ (при нагреве внешней средой); $\sigma_i = \lambda\sigma_{ii}/\alpha_t E q_0 \delta^2$; $M_0 = 1$ (при нагреве внутренними источниками тепла) ($i = \alpha, \beta$).

По формулам (22), (23) произведены расчеты изменения температурных напряжений на поверхности $\Gamma = 1$ вдоль образующей бесконечной цилиндрической оболочки, нагреваемой внутренними источниками тепла. Результаты представлены в виде графиков на рис. 1, 2. При этом принималось $\mathrm{Bi}_- = 0{,}01$, $\mathrm{Bi}_+ = 1$ (кривая *1* на рис. 1, *а* и 2, *а*), $\mathrm{Bi}_- = \mathrm{Bi}_+ = 0{,}01$ (кривая *2* на рис. 1, *б* и 2, *б*), $\mathrm{Bi}_+ = \mathrm{Bi}_- = 1$ (кривая *3* рис. 1, *а* и 2, *б*), $\nu = 0{,}3$, $\rho = 20$. При постоянном значении коэффициента теплоотдачи с поверхностей оболочки напряжения симметричны относительно начала координат, в то время как при кусочно-постоянном значении коэффициента напряжения являются несимметричными. Из графиков видно, что учет кусочно-постоянного изменения коэффициента теплоотдачи приводит к существенному изменению температурных напряжений в оболочке при локальном нагреве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коляно Ю. М., Дідик В. З., Кордуба Б. М.* Температурні напруження в пластинках при залежних від координати коефіцієнтах тепловіддачі.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 6, с. 516—519.
2. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. К, Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР
Львовский университет

Поступила в редколлегию
19.II 1977 г.