3. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., «Наука», 1965. 287 с.
4. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 487 с.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968. 427 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.X 1976 г.

УДК 539.377

В. Д. Павленко, А. П. Матковский

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Наличие отверстий в оболочечных элементах конструкций, находящихся в неравномерном температурном поле, вызывает перераспределение напряжений, обусловленных этим полем. В данной работе приведен способ решения квазистатической задачи термоупругости для сферической оболочки с круговым отверстием.

Пусть оболочка радиусом R, толщиной $2h$, с круговым отверстием находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, температура которой является функцией координат и времени τ. На контуре отверстия теплообмен задается граничным условием первого, второго или третьего рода. В центре отверстия радиусом ρ разместим начало полугеодезической системы координат r, θ.

Определение температурного поля сводится к решению дифференциального уравнения [4]

$$\Delta F_j - \mu_j^2 F_j - \frac{1}{a}\frac{\partial F_j}{\partial \tau} = -g_j, \tag{1}$$

где

$$\mu_j^2 = \frac{1}{h^2}\left[\varepsilon_1 + k^2 + 3\lambda_j(\varepsilon_2 - k)\right]; \quad g_1 = f_1; \quad g_2 = \frac{1}{\lambda_2} f_2;$$

$$f_j = \frac{1}{h^2}\left[\varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + 3\lambda_j(\varepsilon_1 t_2 + \varepsilon_2 t_1)\right]; \quad \varepsilon_j = 0{,}25\left(\mathrm{Bi}^{(1)} \pm \mathrm{Bi}^{(2)}\right);$$

$$t_j = 0{,}5\left(t_1^c \pm t_2^c\right); \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{6(\varepsilon_2 - k)}\left[2\varepsilon_1 + 3 \mp \sqrt{(2\varepsilon_1 + 3)^2 + 12(\varepsilon_2 - k)^2}\right];$$

$$\mathrm{Bi}^{(j)} = 2hh_t^{(j)}; \quad k = \frac{h}{R}; \qquad j = 1, 2;$$

a — коэффициент температуропроводности материала оболочки; $h_t^{(1)}$, $h_t^{(2)}$ — относительные коэффициенты теплоотдачи с поверхностей; t_j^c — температура среды, омывающей эти поверхности. Начальные и граничные условия для F_j определяются соответствующими условиями для температуры оболочки и имеют вид

$$\begin{gathered} F_j = \psi^{(j)}(r, \theta) \text{ при } \tau = 0; \\ F_j = F_c^{(j)}(\theta, \tau), \quad \frac{\partial F_j}{\partial r} = -\frac{1}{\lambda} q^{(j)}(\theta, \tau), \\ \frac{\partial F_j}{\partial r} = h_t\left(F_j - F_c^{(j)}\right) \text{ при } r = \rho, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\psi^{(j)}$, $F_c^{(j)}$, $q^{(j)}$ — заданные функции; λ — коэффициент теплопроводности; h_t — относительный коэффициент теплоотдачи с контура отверстия.

В предположении, что функции g_j, $\psi^{(j)}$, $F_c^{(j)}$, $q^{(j)}$ можно представить рядами Фурье, решение F_j ищем в виде

$$F_j(r, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} [F_{1,n}^{(j)}(r, \tau) \cos n\theta + F_{2,n}^{(j)}(r, \tau) \sin n\theta]. \tag{3}$$

Подставляя решение (3) в (1), (2) и приравнивая выражения при одинаковых гармониках, для $F_{l,n}^{(j)}$ получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \mu_j^2 - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}\right) F_{l,n}^{(j)} = -g_{l,n}^{(j)}. \tag{4}$$

Здесь $g_{l,n}^{(j)}(r, \tau)$ — коэффициент ряда Фурье функции g_j. Считая r параметром, представим правую часть уравнения (4) рядом Маклорена по переменной τ:

$$g_{l,n}^{(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{l,n,k}^{(j)}(r)\, \tau^k. \tag{5}$$

Применяя к (4) и соответствующим краевым условиям интегральное преобразование Лапласа по переменной τ, получаем уравнение

$$\Delta^* F_{l,n}^{(j)*} - \left(\frac{s}{a} + \mu_j^2\right) F_{l,n}^{(j)*} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{l,n,k}^{(j)}(r)}{s^k} \tag{6}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} &F_{l,n}^{(j)*} = F_{c,l,n}^{(j)*}(s), \quad \frac{d}{dr} F_{l,n}^{(j)*} = -\frac{1}{\lambda} q_{l,n}^{(j)*}(s), \\ &\frac{d}{dr} F_{l,n}^{(j)*} = h_t (F_{l,n}^{(j)*} - F_{c,l,n}^{(j)*}) \text{ при } r = \rho, \end{aligned} \tag{7}$$

где обозначено

$$\Delta^* = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}; \quad a_{l,n,0}^{(j)} = -\frac{1}{a}\psi_{l,n}^{(j)}; \quad a_{l,n,k+1}^{(j)} = -b_{l,n,k}^{(j)} k!; \qquad k \geqslant 0;$$

s — параметр преобразования; $F_{l,n}^{(j)*}$, $F_{c,l,n}^{(j)*}$, $q_{l,n}^{(j)*}$ — изображения коэффициентов Фурье соответствующих функций. Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$F_{l,n}^{(j)*} = A_{l,n}^{(j)} K_n(r\xi_j) + M_{l,n}^{(j)*}(r, s), \tag{8}$$

где

$$M_{l,n}^{(j)*}(r, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{l,n,k}^{(j)}(r)}{s^k}; \quad C_{l,n,1}^{(j)} = -a a_{l,n,0}^{(j)};$$

$$C_{l,n,k+1}^{(j)} = a[\Delta^* C_{l,n,k}^{(j)} - \mu_j^2 C_{l,n,k}^{(j)} - a_{l,n,k}^{(j)}]; \quad k \geqslant 1; \quad \xi_j = \sqrt{\frac{s}{a} + \mu_j^2};$$

$K_n(r\,\xi_j)$ — функция Макдональда. Неизвестные коэффициенты определяются из граничных условий (7). Используя асимптотическое представление функций Макдональда, окончательно находим: при граничных условиях первого рода

$$F_{l,n}^{(j)} = \frac{r-\rho}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\pi a r}} \int_0^{\tau} [F_{c,l,n}^{(j)}(\tau - t) - M_{l,n}^{(j)}(\rho, \tau - t)]\, \alpha^{(j)}(r, t) \times$$

$$\times \frac{dt}{t\sqrt{t}} + M_{l,n}^{(j)}(r, \tau), \qquad r \neq \rho;$$

при граничных условиях второго рода

$$F_{l,n}^{(j)} = \sqrt{\frac{a\rho}{\pi r}} \int_0^{\tau} \left[\frac{1}{\lambda} q_{l,n}^{(j)}(\tau - t) + N_{l,n}^{(j)}(\rho, \tau - t)\right] \alpha^{(j)}(r, t) \frac{dt}{\sqrt{t}} + M_{l,n}^{(j)}(r, \tau);$$

при граничных условиях третьего рода

$$F_{i,n}^{(j)} = a\sqrt{\frac{\rho}{r}}\int_0^\tau \{h_t [F_{c,i,n}^{(j)}(\tau - t) - M_{i,n}^{(j)}(\rho, \tau - t)] + N_{i,n}^{(j)}(\rho, \tau - t)\}\,\alpha^{(j)}(r, t) \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi a t}} - h_t \exp[\beta^2(r, t)]\,\mathrm{erfc}\,[\beta(r, t)]\right\} dt + M_{i,n}^{(j)}(r, \tau),$$

где

$$M_{i,n}^{(j)}(r, t) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\,C_{i,n,p+1}^{(j)}(r);\quad N_{i,n}^{(j)}(r, t) = \frac{\partial}{\partial r}M_{i,n}^{(j)}(r, t);$$

$$\alpha^{(j)}(r, t) = \exp\left[-a\mu_j^2 t - \frac{(r-\rho)^2}{4at}\right];\quad \beta(r, t) = \frac{r-\rho}{2\sqrt{at}} + h_t\sqrt{at}\,.$$

Учитывая локальность возмущения, вносимого отверстием, напряженно-деформированное состояние оболочки можно описать дифференциальным уравнением [4]

$$\Delta\Delta\Phi - i\gamma^2\Delta\Phi = \Delta P, \tag{9}$$

где

$$\gamma^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh};\quad P = \lambda_t[(\nu_0 - i\lambda_2)F_1 - \lambda_2(\nu_0 - i\lambda_1)F_2];\quad \lambda_t = \frac{\alpha_t R\gamma^2}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

$\nu_0 = \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}}$; ν — коэффициент Пуассона; α_t — коэффициент линейного расширения. На контуре отверстия заданы граничные условия

$$L^{(m)}\Phi = \Psi^{(m)}(\theta), \qquad (m = 1, 2, 3, 4)\ \text{при}\ r = \rho. \tag{10}$$

Здесь $L^{(m)}$ — дифференциальный оператор; $\Psi^{(m)}$ — известная функция. Решение уравнения (9) представим в виде ряда

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}[\Phi_n^{(1)}(r)\cos n\theta + \Phi_n^{(2)}(r)\sin n\theta]. \tag{11}$$

Следуя работам [1, 3], получаем

$$\Phi_n^{(j)} = \Psi_n^{(j)} + \psi_n^{(j)},$$

где

$$\Psi_n^{(j)} = b_n^{(j)}\frac{1}{r^n} + d_n^{(j)}H_n^{(1)}(r\gamma i\sqrt{i}) + i\delta_n C\ln r; \tag{12}$$

$$\psi_n^{(j)} = I_n(r\gamma\sqrt{i})\int K_n(r\gamma\sqrt{i})P_n^{(j)}r dr - K_n(r\gamma\sqrt{i})\int I_n(r\gamma\sqrt{i})P_n^{(j)}r dr; \tag{13}$$

$P_n^{(j)}$ — коэффициент ряда Фурье функции P; $\delta_n = \begin{cases}1 & \text{при } n = 0,\\ 0 & \text{при } n \neq 0.\end{cases}$

Определим напряженно-деформированное состояние оболочки для случая, когда температура среды зависит только от времени. Решение (11) в данном случае примет вид

$$\Phi = (C_0 + iD_0)H_0^{(1)}(r\gamma i\sqrt{i}) + iC\ln r - I_0(r\gamma\sqrt{i})\int_r^{\infty}K_0(\xi\gamma\sqrt{i})P_0\xi d\xi -$$

$$- K_0(r\gamma\sqrt{i})\int_a^r I_0(\xi\gamma\sqrt{i})P_0\xi d\xi.$$

Постоянные C_0, D_0 и C определяются при удовлетворении граничным условиям (10). Для свободного от напряжений контура отверстия имеем $N_r = 0$, $M_r = 0$, $Q_r = 0$ при $r = \rho$. Заметим, что в этом случае постоянная

C равна нулю. Для оболочки с абсолютно жесткой круглой шайбой, впаянной в отверстие, граничные условия запишем в виде [2]

$$w = w^0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad u = -w^0 \frac{\rho}{R} \text{ при } r = \rho.$$

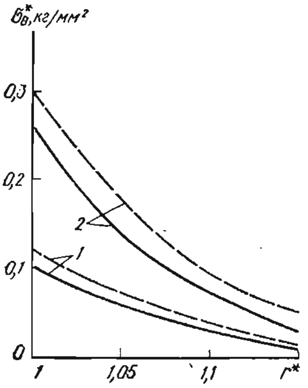

Рис. 1

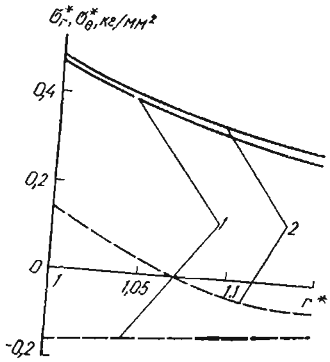

Рис. 2

Из условия равновесия шайбы

$$\int_l \left(Q_r \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} - N_r \frac{\rho}{R}\right) dl = 0$$

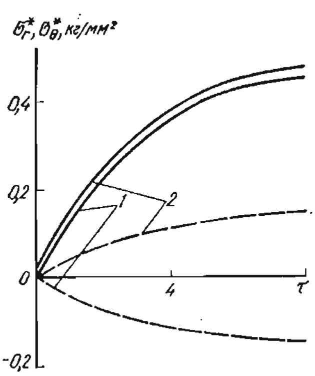

Рис. 3

(l — дуга контура) находим

$$w^0 = -C \frac{\nu_0 Rh \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho^2 (R - \sqrt{R^2 - \rho^2})}.$$

Приведем результаты расчета напряженного состояния оболочки, находящейся в среде, температура которой на поверхностях постоянна и равна t градусам. Начальную температуру оболочки и температуру среды на контуре отверстия принимаем равными нулю. Вычисления произведены при следующих геометрических параметрах и термоупругих характеристиках:

$$R = 0{,}15 \text{ м}, \quad h = 0{,}003 \text{ м}, \quad \rho = 0{,}04 \text{ м},$$

$$\alpha_t = 1{,}52 \cdot 10^{-5} \text{ 1/град},$$

$$a = 0{,}66 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, \quad E = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2, \quad \nu = 0{,}3, \quad \mathrm{Bi}^{(1)} = \mathrm{Bi}^{(2)} = 1.$$

На рис. 1—3 приведены величины напряжений $\overset{*}{\sigma}_r = \sigma_r/t$, $\overset{*}{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/t$ для внутренней поверхности оболочки, где напряжения принимают максимальные значения. На рис. 1 приведена зависимость величины $\overset{*}{\sigma}_\theta$ от $r^* = r/\rho$ для оболочки со свободным отверстием (сплошные линии) при $\tau = \infty$. Для сравнения приведены значения напряжения $\overset{*}{\sigma}_\theta$ для пластинки (штриховые линии). Кривые *1*, *2* соответствуют двум значениям коэффициента теплоотдачи на контуре отверстия: $\mathrm{Bi}_R = 1, \infty$ ($\mathrm{Bi}_R = 2hh_t$). При заданных значениях параметров напряжения достигают наибольших значений при $\mathrm{Bi}_R = \infty$ и быстро затухают по r. На рис. 2, 3 приведены напряжения $\overset{*}{\sigma}_r$ (сплошные линии) и $\overset{*}{\sigma}_\theta$ (штриховые) в оболочке с абсолютно жесткой круглой шайбой. Кривые *1*, *2* соответствуют $\mathrm{Bi}_R = 0$, $\mathrm{Bi}_R = \infty$. Графики рис. 2 получены при $\tau = \infty$. Напряжения на контуре (см. рис. 3) возрастают по времени и становятся практически постоянными при $\tau > 8$ с. Отметим, что в случае шайбы кольцевые напряжения меньше радиальных и могут менять знак в зависимости от величины Bi_R.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. К., «Наук. думка», 1974. 270 с.
2. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И.* Сферические днища, ослабленные отверстиями. К., «Наук. думка», 1970. 322 с.
3. *Швец Р. Н., Павленко В. Д., Матковский А. П.* Квазистатическая задача термоупругости для тонких оболочек с круговым отверстием.— Докл. АН УССР. Сер. А, № 4, с. 349—353.
4. *Швец Р. Н., Павленко В. Д., Синишин Л. В.* Температурные напряжения в сферической оболочке с кольцом равных круговых отверстий.— Пробл. прочности, 1974, № 6, с. 8—12.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.IX 1976 г.

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, В. З. Дидык

УСТАНОВИВШИЕСЯ НАПРЯЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ТЕПЛООБМЕНОМ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЛОКАЛЬНЫМ НАГРЕВОМ

Пусть тонкая бесконечная круговая цилиндрическая оболочка нагревается по кольцевой области $|\alpha| \leqslant b$ внутренними источниками тепла мощностью q_0 или внешней средой температуры $t_0 = \text{const}$. Через поверхности $\gamma = \pm\,\delta$ оболочки осуществляется теплообмен с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона. Предположим, что температура оболочки на бесконечности исчезает.

Для определения установившегося температурного поля в оболочке имеем уравнение теплопроводности [1, 2]

$$T'' - [\varkappa_-^2 + \varkappa N(\alpha)]\, T = -\frac{q}{\lambda} N(\alpha), \tag{1}$$

где

$$T' = \frac{dT}{d\alpha}; \quad \varkappa_\pm^2 = \frac{\alpha^\pm}{\lambda\delta}; \quad \varkappa = \varkappa_+^2 - \varkappa_-^2;$$

$N(\alpha) = S_-(\alpha + b) - S_+(\alpha - b)$, $S_\pm(\eta)$ — асимметричные единичные функции; λ, α^+, α^- — соответственно коэффициенты теплопроводности, теплоотдачи с поверхностей области нагрева и за ее пределами; $q = q_0$ при нагреве внутренними источниками тепла; $q = t_0\alpha^+/\delta$ при нагреве внешней средой.

Температурное поле в оболочке находим таким образом. Умножая уравнение (1) на $N(\alpha)$, вводя замену

$$U = TN(\alpha) \tag{2}$$

и учитывая равенства

$$S_\pm(\alpha - \alpha_i)\, S_\pm(\alpha - \alpha_j) = S_\pm(\alpha - \alpha_{\max i,j}), \tag{3}$$

$$f(\alpha)\, \delta_\pm(\alpha) = f(0)\, \delta'_\pm(\alpha) - f'(0)\, \delta_\pm(\alpha), \tag{4}$$

получаем уравнение с постоянными коэффициентами относительно U:

$$U'' - \varkappa_+^2 U = T_- - T_+ - \frac{q}{\lambda} N(\alpha), \tag{5}$$

где

$$T_\mp = T(\mp 2b - \alpha)\, \delta'_\mp(\alpha \pm b); \quad \delta_\pm(\eta) = \frac{d}{d\eta} S_\pm(\eta).$$