

рис. 2. Результаты экспериментального исследования горения цилиндрической теплоизоляции при $T_* - T_0 = 1500^\circ\text{C}$ отмечены крестиками.

Рис. 3 иллюстрирует распределение температуры по толщине области (2) для $T_* - T_0 = 1500, 1600$ и 1700°C (кривые 1—3 соответственно). Рис. 3, а соответствует случаю, когда продолжительность погружения пер-

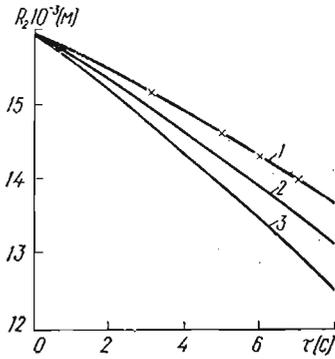


Рис. 2

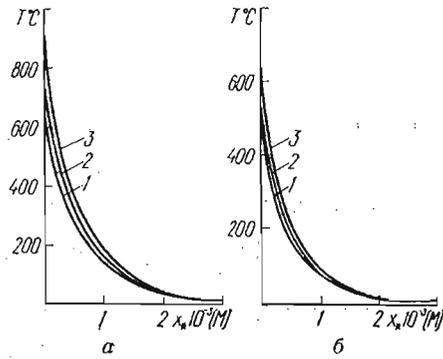


Рис. 3

вичного преобразователя в расплавленную сталь равна 7 с, а рис. 3, б — когда продолжительность погружения равна 5 с.

Из проведенных исследований следует, что необходимая оптимальная толщина цилиндрической теплоизоляции, обеспечивающая повышение температуры внутренней стенки не более чем на 10°C при семисекундном погружении в расплавленную сталь, температура которой $T_* = 1720^\circ\text{C}$, составляет $5,45 \cdot 10^{-3}$ м, а при погружении на 5 с — $5,1 \cdot 10^{-3}$ м. Необходимо отметить, что оптимальная толщина практически не изменяется по сравнению с вышеуказанной при уменьшении температуры расплавленной стали до 1520°C .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Выш. школа», 1967. 599 с.
2. Лодиз Р., Паркер Р. Рост монокристаллов. М., «Мир», 1974. 429 с.
3. Любов Б. Я., Ройтбурд А. Л., Темкин Д. Е. Математический анализ процесса кристаллизации в телах простейшей формы. — В кн.: Рост монокристаллов. Т. 3. М., 1961, с. 68—79.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.XI 1976 г.

УДК 536.12 : 62—503.55

В. М. Вигак, А. В. Костенко

ОПТИМАЛЬНЫЙ НАГРЕВ ПЛАСТИНЫ И СФЕРЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ГРАДИЕНТЫ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Практически важной проблемой теории оптимального управления системами с распределенными параметрами является задача определения оптимального по быстродействию управления нестационарным температурным режимом твердого тела при ограничениях на управление, перепады и градиенты температурного поля, температурные напряжения и другие параметры [1, 2]. В данной статье рассматривается постановка и аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию управления нагревом (охлаждением) пластины и полый сферы при ограничениях на управление,

градиенты температурного поля и максимальный перепад температур под конец процесса нагрева или охлаждения.

Для определения оптимального управления рассмотрим следующую задачу. Требуется найти функции управления $t_0(\tau)$ и $t_1(\tau)$, удовлетворяющие граничным условиям третьего рода

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_j(k, \tau)}{\partial \rho} - \text{Bi}_0 [T_j(k, \tau) - t_0(\tau)] &= 0; \\ \frac{\partial T_j(l, \tau)}{\partial \rho} + \text{Bi}_1 [T_j(l, \tau) - t_1(\tau)] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

чтобы при ограничениях на функции управления

$$t_i(\tau) \leq u_i(\tau) \quad (i = 0, 1) \quad (2)$$

и на градиенты температурного поля

$$\frac{\partial T_j(k, \tau)}{\partial \rho} \geq S_0(T_j); \quad \frac{\partial T_j(l, \tau)}{\partial \rho} \leq S_1(T_j) \quad (3)$$

за минимальное время τ_0 перевести тело из начального состояния

$$T_j(\rho, 0) = f(\rho) \quad (4)$$

в конечное с максимальной температурой на поверхностях

$$T_j(g, \tau_0) = T^* \quad (g = k, l) \quad (5)$$

и максимальным перепадом температур

$$T_j(g, \tau_0) - T_j(\rho_1, \tau_0) \leq \delta T \quad (g = k, l; \rho_1 \in]0, l[). \quad (6)$$

Кроме того, температурное поле $T_j(\rho, \tau)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 [\rho^j T_j(\rho, \tau)]}{\partial \rho^2} = \frac{\partial [\rho^j T_j(\rho, \tau)]}{\partial \tau}. \quad (7)$$

Здесь $\rho = \frac{x}{l}$ ($k \leq \rho \leq 1$); x — ось координат; $\tau = \frac{a\tau^*}{l^2}$ — безразмерное время; a — коэффициент температуропроводности; τ^* — время; $\text{Bi}_0 = \frac{\alpha_0 l}{\lambda}$,

$\text{Bi}_1 = \frac{\alpha_1 l}{\lambda}$ — критерий Био; α_0, α_1 — коэффициенты теплообмена на поверхностях $\rho = k$ и $\rho = 1$; λ — коэффициент теплопроводности; $S_i(T_j)$ ($i = 0, 1$) — предельно допустимые градиенты температурного поля на граничных поверхностях $\rho = k$ и $\rho = 1$, которые, естественно, являются функциями температур в соответствующих точках; T^* — максимальная температура тела, которая представляет собой цель нагрева; δT — максимально допустимый перепад температур в теле под конец процесса нагрева, который характеризует качество нагрева; $j = 0, k = 0, l = h$ — для пластины и $j = 1, k = \frac{R_1}{R_2}, l = R_2$ — для сферы, где h — толщина пластинки; R_1, R_2 — внутренний и наружный радиусы сферы.

Аналогично ставится задача оптимального управления охлаждением пластины и полый сферы. Для этого достаточно в ограничениях (2), (3) поменять знак « \geq » на знак « \leq » и наоборот, а в ограничении (6) поменять местами $T_j(g, \tau_0)$ и $T_j(\rho_1, \tau_0)$.

Очевидно, что при отсутствии внутренних источников тепла оптимальное по быстродействию управление нагревом тела для поставленной задачи может осуществляться лишь за счет максимально возможного в каждый момент времени теплового потока на границе тела.

Поскольку тепловой поток на поверхности $\rho = k$ пропорционален $\frac{\partial T_j(k, \tau)}{\partial \rho}$, а на поверхности $\rho = 1$ — $\frac{\partial T_j(l, \tau)}{\partial \rho}$, то при наличии ограничений (2), (3) максимальные тепловые потоки на граничных поверхностях возможны в

следующих четырех случаях:

$$\begin{aligned} t_i(\tau) &= u_i(\tau) & (i = 0, 1), \\ \frac{\partial T_j(k, \tau)}{\partial \rho} &\geq S_0(T_j), & \frac{\partial T_j(1, \tau)}{\partial \rho} \leq S_1(T_j); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} t_i(\tau) &\leq u_i(\tau) & (i = 0, 1), \\ \frac{\partial T_j(k, \tau)}{\partial \rho} &= S_0(T_j), & \frac{\partial T_j(1, \tau)}{\partial \rho} = S_1(T_j); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} t_0(\tau) &\leq u_0(\tau), & t_1(\tau) = u_1(\tau), \\ \frac{\partial T_j(k, \tau)}{\partial \rho} &= S_0(T_j), & \frac{\partial T_j(1, \tau)}{\partial \rho} \leq S_1(T_j); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} t_0(\tau) &= u_0(\tau); & t_1(\tau) \leq u_1(\tau), \\ \frac{\partial T_j(k, \tau)}{\partial \rho} &\geq S_0(T_j), & \frac{\partial T_j(1, \tau)}{\partial \rho} = S_1(T_j). \end{aligned} \quad (11)$$

В случае (8) функции управления $t_i(\tau)$ равны предельно допустимым $u_i(\tau)$ ($i = 0, 1$). Трудности в определении управления возникают для случаев (9) — (11), когда ограничивающим фактором нагрева являются градиенты температурного поля.

Рассмотрим случай (9). Если удастся определить предельно допустимый температурный режим $T_j(\rho, \tau)$, удовлетворяющий условиям (9), то из граничных условий (1) легко найти функции управления, которые обеспечивают найденный режим.

Аппроксимировав допустимые градиенты температурного поля ломаными линиями и представив их в отдельных интервалах температур линейными зависимостями

$$S_i(T_j) = b_i + c_i T_j \quad (i = 0, 1),$$

для определения предельно допустимого температурного режима в случае (9) рассмотрим решение уравнения (7) с начальными условиями (4) и граничными условиями

$$\frac{\partial T_j(k, \tau)}{\partial \rho} - c_0 T_j(k, \tau) = b_0(\tau), \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_j(1, \tau)}{\partial \rho} - c_1 T_j(1, \tau) = b_1(\tau),$$

где для большей общности принято $b_i = b_i(\tau)$.

Условия (12) аналогичны обычным граничным условиям третьего рода [4, 5], но в обычных граничных условиях третьего рода $c_0 \geq 0$, $c_1 \leq 0$, а в нашем случае $c_i \in]-\infty, \infty[$ ($i = 0, 1$). Поэтому, решив задачу (4), (7), (12), как частный случай, получим решение задачи теплопроводности с обычными граничными условиями третьего рода.

Известно [6], что решение задачи (4), (7), (12) существует и оно единственно. С помощью преобразования Лапласа [3] решение задачи (4), (7), (12) можно представить в виде

$$T_j(\rho, \tau) = \frac{1}{\sigma^j} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} [g b_0(\tau - \eta) T_1(\rho, \eta) + b_1(\tau - \eta) T_2(\rho, \eta)] d\eta + T_{j3}(\rho, \tau) \right\}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(\rho, \tau) &= - \frac{1 + (\rho - 1) q_1}{q_0 - q_1 - (1 - k) q_0 q_1} - 2 \sum_{n=1}^m (\gamma_n^2 - q_1^2) A_n X_n(\rho) \exp(\gamma_n^2 \tau) + \\ &+ 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} (\lambda_n^2 + q_1^2) B_n Y_n(\rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau); \end{aligned}$$

$$T_2(\rho, \tau) = \frac{1 + (\rho - k) q_0}{q_0 - q_1 - (1 - k) q_0 q_1} + 2 \sum_{n=1}^m \frac{\gamma_n^2 - q_0 q_1}{\operatorname{ch}(1 - k) \gamma_n} A_n X_n(\rho) \exp(\gamma_n^2 \tau) -$$

$$- 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 + q_0 q_1}{\cos(1 - k) \lambda_n} B_n Y_n(\rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau);$$

$$T_{\beta}(\rho, \tau) = 2 \sum_{n=1}^m \gamma_n^2 (\gamma_n^2 - q_1^2) A_n \int_k^1 \rho^j f(\rho) X_n(\rho) d\rho X_n(\rho) \exp(\gamma_n^2 \tau) +$$

$$+ 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + q_1^2) B_n \int_k^1 \rho^j f(\rho) Y_n(\rho) d\rho Y_n(\rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau); \quad (14)$$

$$A_n = [(1 - k)(\gamma_n^2 - q_0^2)(\gamma_n^2 - q_1^2) - (\gamma_n^2 + q_0 q_1)(q_0 - q_1)]^{-1};$$

$$B_n = [(1 - k)(\lambda_n^2 + q_0^2)(\lambda_n^2 + q_1^2) + (\lambda_n^2 - q_0 q_1)(q_0 - q_1)]^{-1};$$

$$X_n(\rho) = \operatorname{ch} \gamma_n(\rho - k) + \frac{q_0}{\gamma_n} \operatorname{sh} \gamma_n(\rho - k);$$

$$Y_n(\rho) = \cos \lambda_n(\rho - k) + \frac{q_0}{\lambda_n} \sin \lambda_n(\rho - k);$$

$$g = 1; q_0 = c_0; q_1 = c_1 \text{ — для пластины;}$$

$$g = k; q_0 = c_0 + \frac{1}{k}; q_1 = c_1 + 1 \text{ — для сферы;}$$

γ_n — действительные положительные корни уравнения

$$(q_0 - q_1) \operatorname{ch}(1 - k) \gamma + (\gamma^2 - q_0 q_1) \frac{\operatorname{sh}(1 - k) \gamma}{\gamma} = 0; \quad (15)$$

$i\lambda_n$ ($i = \sqrt{-1}$, $\lambda_n > 0$) — мнимые корни уравнения (15).

Исследование корней уравнения (15) показывает, что для параметров q_i ($i = 0, 1$) из открытой области G_1 (рис. 1, а для пластины, рис. 1, б для полый сферы при $k = 0,5$) уравнение (15) не имеет действительных корней ($m = 0$), а имеет счетное множество простых мнимых корней $i\lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

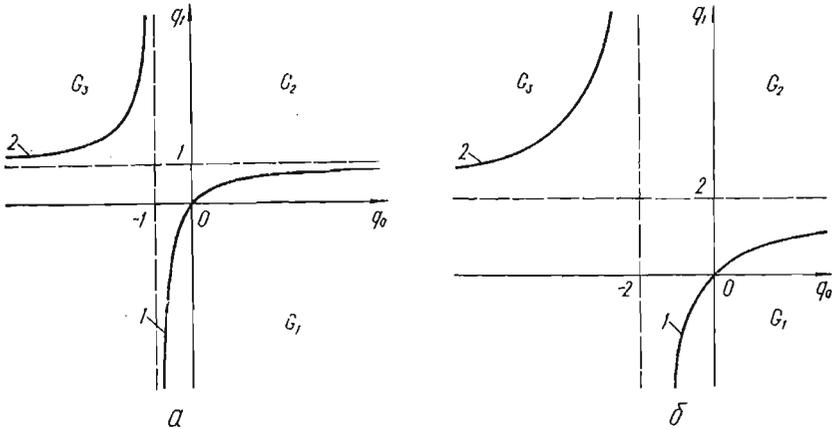


Рис. 1

Для параметров q_i , принадлежащих открытой области G_2 , уравнение (15) имеет единственный положительный действительный корень γ_1 ($m = 1$) и счетное множество простых мнимых корней $i\lambda_n$ ($n = 2, 3, \dots$), за исключением первого $i\lambda_1$. Его в решении замещает корень γ_1 .

Для сферы на рис. 2 показаны корень γ_1 и модули первых трех корней $i\lambda_n$ уравнения (15) при $k = 0,5$, $c_0 = 2$ и $c_1 \in [-8, 8]$.

Наконец, для параметров q_i из открытой области G_3 уравнение (15) имеет уже два положительных действительных корня γ_n ($n = 1, 2$; $m = 2$) и счетное множество корней $i\lambda_n$ ($n = 3, 4, \dots$), за исключением двух первых $i\lambda_n$ ($n = 1, 2$). Их в решении (13), (14) замещают корни γ_n ($n = 1, 2$). Для иллюстрации последнего на рис. 3 показан характер поведения действительных и модулей первых мнимых корней уравнения (15) для сферы при $k = 0,5$; $c_0 = -10$ и $c_1 \in [-8, 8]$.

На общей границе областей G_1 и G_2 (линии 1 рис. 1), которая описывается уравнением

$$q_0 - q_1 - (1 - k) q_0 q_1 = 0, \quad (16)$$

корень $\gamma_1 = 0$. На общей границе областей G_2 и G_3 (линии 2), которая описывается уравнением (16) при $q_0 < -\frac{1}{1-k}$, корень $\gamma_2 = 0$.

Решение задачи теплопроводности (4), (7), (12), на линиях 1 и 2 (см, рис. 1) можно представить в том же виде (13), где

$$T_1(\rho, \tau) = -\frac{1 + (\rho - 1) q_1}{\omega_0} \left(\tau - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) - \frac{(\rho - 1)^2}{6\omega_0} [3 + (\rho - 1) q_1] -$$

$$- 2 \sum_{n=1}^m (\gamma_n^2 - q_1^2) A_n X_n(\rho) \exp(\gamma_n^2 \tau) +$$

$$+ 2 \sum_{n=m+2}^{\infty} (\lambda_n^2 + q_1^2) B_n Y_n(\rho) \times \exp(-\lambda_n^2 \tau);$$

$$T_2(\rho, \tau) = \frac{1 + (\rho - k) q_0}{\omega_0} \left(\tau - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) + \frac{(\rho - k)^2}{6\omega_0} [3 + (\rho - k) q_0] +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^m \frac{(\gamma_n^2 - q_0 q_1)}{\operatorname{ch}(1 - k) \gamma_n} A_n X_n(\rho) \times$$

$$\times \exp(\gamma_n^2 \tau) - 2 \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 + q_0 q_1)}{\cos(1 - k) \lambda_n} \times$$

$$\times B_n Y_n(\rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau); \quad (17)$$

$$T_3(\rho, \tau) = \frac{1 + (\rho - k) q_0}{\omega_0} \int_k^1 \rho' f(\rho) [1 + (\rho - 1) q_1] d\rho +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^m \gamma_n^2 (\gamma_n^2 - q_1^2) A_n \int_k^1 \rho' f(\rho) X_n(\rho) d\rho X_n(\rho) \exp(\gamma_n^2 \tau) +$$

$$+ 2 \sum_{n=m+2}^{\infty} \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + q_1^2) B_n \int_k^1 \rho' f(\rho) Y_n(\rho) d\rho Y_n(\rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau);$$

$$\omega_0 = \frac{1 - k}{3} [3 + q_0 q_1 (1 - k)^2];$$

$$\omega_1 = \frac{(1 - k)^3}{30} [5 + q_0 q_1 (1 - k)^2];$$

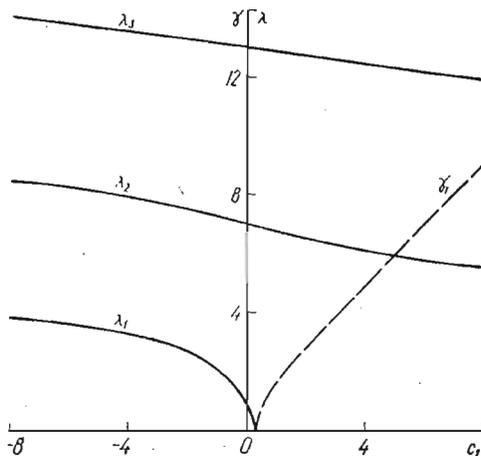


Рис. 2

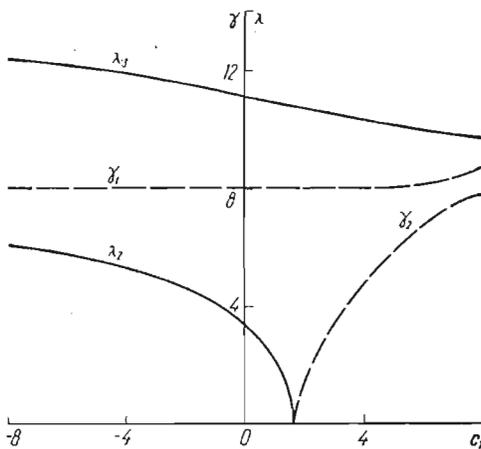


Рис. 3

$m = 0$ при $q_0 > -\frac{1}{1-k}$ и $m = 1$ при $q_0 < -\frac{1}{1-k}$; $q_0, q_i, A_n, B_n, X_n(\rho), Y_n(\rho)$ определяются так же, как и для выражений (14).

Итак, для параметров q_i ($i = 0, 1$) из открытой области G_1 решение задачи (4), (7), (12) совпадает с классическим. Для параметров q_i из открытых областей G_2 и G_3 решение этой задачи имеет вид (13), (14), где $m = 1$ для области G_2 и $m = 2$ для области G_3 , а на граничных линиях 1 и 2 решение выводится и принимает вид (13), (17).

Решив задачу теплопроводности (4), (7), (12) для всей плоскости существования параметров q_0 и q_1 , можно показать, что задача оптимального управления нагревом (1)–(7) легко разрешима для всех четырех случаев (8)–(11). Например, в случае (11) температурный режим определяется по формуле (13) при $c_0 = \text{Bi}_0 > 0, b_0(\tau) = -\text{Bi}_0 \mu_0(\tau)$ и $c_1 \in]-\infty, \infty[$; управляющая функция $t_1(\tau)$ определяется из второго граничного условия (1), а $t_0(\tau) = u_0(\tau)$.

Время переключения управления при переходе от предыдущего ограничения к последующему определяется из соответствующего условия сопряжения, в качестве которого выступает одно из равенств (8)–(11) в момент перехода. Например, при переходе от ограничений в случае (8) к ограничениям в случае (11) условием сопряжения служит равенство

$$\frac{\partial T_j(1, \tau)}{\partial \rho} = S_1(T_j),$$

а при переходе от ограничений в случае (9) к ограничениям в случае (10) — равенство $t_1(\tau) = u_1(\tau)$ и т. д.

Время отключения управления τ_0 определяется из условия конечной цели нагрева (5) либо (6). При этом, если условия (6) будут удовлетворены в процессе подъема температур $T_j(g, \tau)$ ($g = k, 1$) до максимальной величины T^* либо вообще отсутствуют при постановке задачи, то время отключения управления τ_0 определяется из одного из условий (5).

Если на завершающей стадии нагрева условия (5) будут достигнуты, а условия для перепадов температур (6) не будут удовлетворены, то температурный режим на последнем этапе нагрева осуществляется при условиях

$$T_j(g, \tau) = T^* \quad (g = k, 1) \quad (18)$$

до тех пор, пока не будет удовлетворено условие

$$T_j(\rho_1, \tau) = T^* - \delta T. \quad (19)$$

Поскольку в последнем равенстве координата ρ_1 , при которой температурное поле $T_j(\rho, \tau)$ к моменту $\tau = \tau_0$ достигает минимума, неизвестна, то время τ_0 определяется путем последовательных приближений. В качестве нулевого приближения τ_{00} принимаем время, найденное из условия (19) при $\rho_{10} = 0,5(1+k)$, после чего для времени τ_{00} уточняется истинный минимум функции $T_j(\rho, \tau_{00})$ и координата его достижения ρ_{11} . Для координаты ρ_{11} с помощью того же равенства (19) определяется второе приближение τ_{01} и т. д. Быстрая сходимости такого процесса очевидна, поскольку для граничных условий (18) функция $T_0(\rho, \tau)$ достигает минимума при значении $k = 0,5$, а $T_1(\rho, \tau)$ — для значений ρ , близких к $0,5(1+k)$.

Таким образом, поставленная задача оптимального управления нагревом пластины и полый сферы решена аналитическим путем. При этом следует подчеркнуть, что ключевым вопросом при решении данной задачи является решение задачи теплопроводности (4), (7), (12) как с положительными, так и с отрицательными коэффициентами теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965. 486 с.
2. Бутковский А. Г., Мальев С. А., Андреев Ю. Н. Оптимальное управление нагревом металла. М., «Металлургия», 1972. 439 с.

3. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., «Наука», 1965. 287 с.
4. Карслоу Г., Эгер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964. 487 с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968. 427 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.X 1976 г.

удк 539.377

В. Д. Павленко, А. П. Матковский

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Наличие отверстий в оболочечных элементах конструкций, находящихся в неравномерном температурном поле, вызывает перераспределение напряжений, обусловленных этим полем. В данной работе приведен способ решения квазистатической задачи термоупругости для сферической оболочки с круговым отверстием.

Пусть оболочка радиусом R , толщиной $2h$, с круговым отверстием находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, температура которой является функцией координат и времени τ . На контуре отверстия теплообмен задается граничным условием первого, второго или третьего рода. В центре отверстия радиусом ρ разместим начало полуэллиптической системы координат r, θ .

Определение температурного поля сводится к решению дифференциального уравнения [4]

$$\Delta F_j - \mu_j^2 F_j - \frac{1}{a} \frac{\partial F_j}{\partial \tau} = -g_j, \quad (1)$$

где

$$\mu_j^2 = \frac{1}{h^2} [\varepsilon_j + k^2 + 3\lambda_j(\varepsilon_2 - k)]; \quad g_1 = f_1; \quad g_2 = \frac{1}{\lambda_2} f_2;$$

$$f_j = \frac{1}{h^2} [\varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + 3\lambda_j(\varepsilon_1 t_2 + \varepsilon_2 t_1)]; \quad \varepsilon_j = 0,25 (Bi^{(1)} \pm Bi^{(2)});$$

$$t_j = 0,5 (t_j^c \pm t_j^s); \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{6(\varepsilon_2 - k)} [2\varepsilon_1 + 3 \mp \sqrt{(2\varepsilon_1 + 3)^2 + 12(\varepsilon_2 - k)^2}];$$

$$Bi^{(j)} = 2hh_j^{(j)}; \quad k = \frac{h}{R}; \quad j = 1, 2;$$

a — коэффициент температуропроводности материала оболочки; $h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ — относительные коэффициенты теплоотдачи с поверхностей; t_j^c — температура среды, омывающей эти поверхности. Начальные и граничные условия для F_j определяются соответствующими условиями для температуры оболочки и имеют вид

$$\begin{aligned} F_j &= \psi^{(j)}(r, \theta) \text{ при } \tau = 0; \\ F_j &= F_c^{(j)}(\theta, \tau), \quad \frac{\partial F_j}{\partial r} = -\frac{1}{\lambda} q^{(j)}(\theta, \tau), \\ \frac{\partial F_j}{\partial r} &= h_t(F_j - F_c^{(j)}) \text{ при } r = \rho, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\psi^{(j)}, F_c^{(j)}, q^{(j)}$ — заданные функции; λ — коэффициент теплопроводности; h_t — относительный коэффициент теплоотдачи с контура отверстия.