

или

$$f_1 = Q_*, \quad \frac{df_1}{dt} = 0, \quad (15)$$

если задача решается в пренебрежении эффектом термоупругого рассеяния.

Построим указанное решение при условиях (15). Полагая в системе уравнений (13)  $N = 1$  ( $i = 0, 1$ ), получаем искомое экстремальное решение

$$\frac{w}{R} \equiv f_1 = Q_* (6t^5 - 15t^4 + 10t^3),$$

$$Q = f_1 + Q_* \cdot 60c^2 (2t^3 - 3t^2 + t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

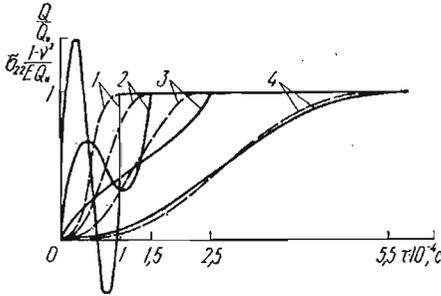


Рис. 2

При  $t > 1$  имеем  $f_1 = Q_*$ ,  $Q = Q_*$ .

На рис. 2 сплошными линиями показаны функции нагружения  $Q$  для цилиндрической оболочки с указанными выше параметрами при  $\tau_* = 10^{-4}$  с (кривая 1),  $\tau_* = 1,5 \cdot 10^{-4}$  с (кривая 2),  $\tau_* = 2,5 \cdot 10^{-4}$  с (кривая 3) и  $\tau_* = 5,5 \cdot 10^{-4}$  с (кривая 4). Штриховыми линиями даны соответствующие им напряжения  $\sigma_{22}$ .

Характерной особенностью полученных решений является то, что

в исследованном диапазоне  $\tau$  с уменьшением времени нагружения  $\tau_*$  максимальные значения  $Q$  увеличиваются и могут быть больше их величины при  $\tau > \tau_*$ . В то же время напряжения  $\sigma_{22}$  не превышают их значений при  $\tau > \tau_*$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
2. Швец Р. Н. Осесимметричные термоупругие колебания цилиндрической оболочки.— Прикл. механика, 1969, 5, № 3, с. 23—30.
3. Бурак Я. И., Будз С. Ф. Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки.— Прикл. механика, 1971, 10, № 2, с. 14—20.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
23.XII 1976 г.

УДК 536.21

Б. П. Галапац, И. П. Куритнык, Е. Я. Чапля

#### ОПТИМИЗАЦИЯ ТОЛЩИНЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ТЕМПЕРАТУРУ ВНУТРЕННЕЙ СТЕНКИ

При решении некоторых технических задач представляет интерес оптимизация толщины цилиндрической теплоизоляции при условии, что температура внутренней стенки цилиндра не должна превышать определенного значения, тогда как внешняя поверхность цилиндра подвергается действию высоких температур и даже горению. Например, при измерении температуры расплавленной стали (1500—1700° С) используются термоэлектрические термометры, состоящие из сменного первичного преобразователя, рассчитанного на разовое (в течение 5—7 с) погружение в жидкую сталь, и жезла, который можно использовать несколько тысяч раз. Особенностью этих термометров является использование бумажных шпупль, защищающих от перегрева контактное устройство.

Настоящая работа посвящена определению и исследованию темпера-

турных полей в бумажной шпуле, погруженной в жидкую сталь, и определению на этой основе оптимальной толщины шпули при заданных ограничениях на температуру внутренней стенки.

Рассмотрим бумажный полый цилиндр (шпулу), помещенный в среду (расплавленную сталь), температура которой выше температуры горения материала шпули. Процесс горения начинается с внешней поверхности цилиндра в момент времени  $\tau = 0$ . В результате горения радиус  $R_2$  внешней поверхности цилиндра уменьшается по определенному закону во времени. Требуется при фиксированном значении радиуса  $R_2$  в начальный момент времени ( $R_2|_{\tau=0} = R_2^{(0)}$ ) определить толщину полого цилиндра (величину радиуса  $R_1$ ), обеспечивающую повышение температуры внутренней стенки  $r = R_1$  не более чем на  $10^\circ\text{C}$  в заданный промежуток времени. Для этого необходимо найти и исследовать нестационарное температурное поле  $T(r, \tau)$  в области полого цилиндра  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Найдем приближенное решение поставленной задачи. Искомое температурное поле  $T(r, \tau)$  ищем в виде

$$T(r, \tau) = \begin{cases} T^{(1)}(r, \tau) & \text{для } R_2 \geq r \geq R_1^*, \\ T^{(2)}(r, \tau) & \text{для } R_1^* \geq r \geq R_1. \end{cases} \quad (1)$$

Выбор точки  $r = R_1^*$  при заданном внешнем радиусе  $R_2^{(0)}$  определяется скоростью горения рассматриваемого материала. При этом время нагрева  $\tau \leq \tau^*$ , где  $\tau^*$  — момент времени, при котором полностью сгорает область  $(1) R_2 \geq r \geq R_1^*$ .

В предположении, что температура горения материала шпули совпадает с температурой расплавленной стали  $T_*$ , которая принимается постоянной, температурное поле  $T^{(1)}$  в области (1) с движущейся границей  $r = R_2$  находится из решения уравнений [1—3]

$$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \tau}, \quad (2)$$

$$T^{(1)}(R_1^*, 0) = T_0, \quad T^{(1)}(R_2, \tau) = T_*, \quad \kappa_1 \frac{\partial T^{(1)}(R_2, \tau)}{\partial r} = \rho_1 W \frac{dR_2}{d\tau}. \quad (3)$$

Здесь  $T_0$  — температура полого цилиндра до погружения в расплавленную сталь;  $a_1 = \frac{\kappa_1}{\rho_1 c_1}$  — коэффициент температуропроводности;  $\kappa_1$  — коэффициент теплопроводности;  $\rho_1$  — плотность;  $c_1$  — удельная теплоемкость материала;  $W$  — теплота, которая выделяется при сгорании 1 кг материала бумажной шпули.

Решение уравнения (2) ищем в виде  $T^{(1)}(r, \tau) = \Theta(u)$ , где  $u = r/\sqrt{R_2^{(0)2} - \beta\tau}$ ;  $\beta$  — произвольная постоянная. При этом

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = \frac{d\Theta}{du} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{R_2^{(0)2} - \beta\tau}} \frac{d\Theta}{du}, \quad \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial r^2} = \frac{1}{R_2^{(0)2} - \beta\tau} \frac{d^2\Theta}{du^2},$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\beta r}{2(\sqrt{R_2^{(0)2} - \beta\tau})^3} \frac{d\Theta}{du}$$

и уравнение (2) записывается так:

$$\frac{d^2\Theta}{du^2} + \left( \frac{1}{u} - \frac{\beta}{2a_1} u \right) \frac{d\Theta}{du} = 0. \quad (4)$$

Обозначим

$$\frac{d\Theta}{du} = z. \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{dz}{z} = - \left( \frac{1}{u} - \frac{\beta}{2a_1} u \right) du. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), находим

$$z = \frac{A}{u} \exp\left(-\frac{\beta u^2}{4a_1}\right). \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в уравнение (5), получаем

$$\begin{aligned} \Theta = T^{(1)}(r, \tau) &= A \int_{R_1^*/R_2^{(0)}}^{r/\sqrt{R_2^{(0)2} - \beta\tau}} \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{\beta u^2}{4a_1}\right) du + B = \\ &= \frac{A}{2} \left\{ \text{Ei} \left[ \frac{\beta}{4a_1} \frac{r^2}{R_2^{(0)2} - \beta\tau} \right] - \text{Ei} \left[ \frac{\beta}{4a_1} \left( \frac{R_1^*}{R_2^{(0)}} \right)^2 \right] \right\} + B, \end{aligned} \quad (8)$$

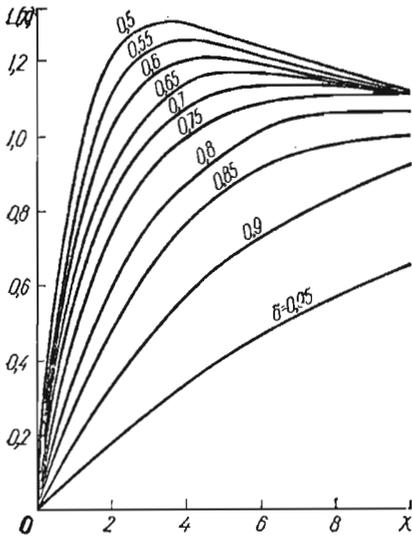


Рис. 1

где  $\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp t}{t} dt$ ;  $A, B$  — постоянные интегрирования.

Для определения постоянных  $\beta, A, B$  имеем условия (3), которые с учетом (8) записываются в виде  $B = T_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \left\{ \text{Ei} \left[ \frac{\beta}{4a_1} \frac{R_2^2}{R_2^{(0)2} - \beta\tau} \right] - \right. \\ \left. - \text{Ei} \left[ \frac{\beta}{4a_1} \left( \frac{R_1^*}{R_2^{(0)}} \right)^2 \right] \right\} + T_0 = T_*, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 \frac{A}{R_2} \exp\left(-\frac{\beta}{4a_1} \frac{R_2^2}{R_2^{(0)2} - \beta\tau}\right) = -\rho_1 W \times \\ \times \frac{dR_2}{d\tau}. \end{aligned}$$

Из уравнений (9) следует, что радиус внешней поверхности цилиндра изменяется по следующему закону во времени:

$$R_2 = \sqrt{R_2^{(0)2} - \beta\tau}. \quad (10)$$

При известном законе (10) условия (9) принимают вид

$$B = T_0, \quad \frac{A}{2} [\text{Ei}(\chi) - \text{Ei}(\delta^2\chi)] = T_* - T_0, \quad A \exp \chi = \frac{2W}{c_1} \chi, \quad (11)$$

где  $\chi = \frac{\beta}{4a_1}$ ;  $\delta = R_1^*/R_2^{(0)}$ .

Определяя из последнего уравнения (11) постоянную  $A = \frac{2W\chi e^{-\chi}}{c_1}$  и подставляя ее значение в предпоследнее, для определения  $\chi$  находим трансцендентное уравнение

$$L(\chi) \equiv \chi \exp(-\chi) [\text{Ei}(\chi) - \text{Ei}(\delta^2\chi)] = \frac{c_1(T_* - T_0)}{W}. \quad (12)$$

Зависимость  $L(\chi)$  от  $\chi$  для различных значений  $\delta$  приведена на рис. 1. Таким образом, решение задачи (2), (3) имеет вид

$$T^{(1)} = \frac{W}{c_1} \chi \exp(-\chi) \left[ \text{Ei} \left( \frac{r^2}{R_2^{(0)2} - \beta\tau} \chi \right) - \text{Ei}(\delta^2\chi) \right] + T_0, \quad (13)$$

где  $\chi$  определяется из уравнения (12).

При известной температуре  $T^{(1)}$  в области (1) температурное поле  $T^{(2)}(r, \tau)$  в области (2)  $R_1^* \geq r \geq R_1$  определяется из решения следующей

краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \tau},$$

$$T^{(2)}(r, 0) = T_0, \quad T^{(2)}(R_1^*, \tau) = T^{(1)}(R_1^*, \tau), \quad \frac{\partial T^{(2)}(R_1, \tau)}{\partial r} = 0, \quad (14)$$

где  $a_2$  — коэффициент температуропроводности в области (2).

Получить решение задачи (14) в замкнутом виде затруднительно. Поскольку нас интересует распределение температуры в области (2) в начальный момент времени  $\tau \leq 7$  с, то можно с достаточной точностью эту область смоделировать полупространством и задачу (14) заменить следующей:

$$\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \tau},$$

$$T^{(2)}(x, 0) = T_0, \quad T^{(2)}(R_1^*, \tau) = T^{(1)}(R_1^*, \tau), \quad T^{(2)}(\infty, \tau) = T_0. \quad (15)$$

Согласно работе [1], решение задачи (15) запишется в виде

$$T^{(2)} = \frac{x_*}{2\sqrt{a_2\pi}} \int_0^\tau \frac{\varphi(\tau - \eta)}{\eta^{1/2}} \exp\left(-\frac{x_*^2}{4a_2\eta}\right) d\eta + T_0, \quad (16)$$

где

$$\varphi(\tau) = \frac{W}{c_1} \chi \exp(-\chi) \left[ \text{Ei}\left(\chi \frac{R_1^{*2}}{R_2^{(0)2} - \beta\tau}\right) - \text{Ei}(\delta^2\chi) \right], \quad x_* = x - R_1^*.$$

Раскладывая функцию  $\varphi(\tau)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\tau = 0$  и ограничиваясь кубическим приближением

$$\varphi(\tau) \approx \frac{W}{c_1} \chi \exp[-\chi(1 - \delta^2)] \left[ \frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}}\right)^2 (1 + \chi\delta^2) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}}\right)^3 (2 + 4\chi\delta^2 + \chi^2\delta^4) \right], \quad (17)$$

находим

$$\begin{aligned} T^{(2)} = & \frac{W}{c_1} \chi \exp[-\chi(1 - \delta^2)] \left\{ \left[ \frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}} \left(1 + \frac{2b}{\tau}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}}\right)^2 (1 + \chi\delta^2) \times \right. \right. \\ & \times \left(1 + \frac{4b}{\tau} + \frac{4}{3} \frac{b^2}{\tau^2}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}}\right)^3 (2 + 4\chi\delta^2 + \chi^2\delta^4) \times \\ & \left. \left. \times \left(1 + \frac{6b}{\tau} + \frac{4b^2}{\tau^2} + \frac{8}{15} \frac{b^3}{\tau^3}\right) \right] \left[ 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{b}{\tau}}\right) \right] - \right. \\ & \left. - \left[ 2 \frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}}\right)^2 (1 + \chi\delta^2) \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3} \frac{b}{\tau}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\beta\tau}{R_2^{(0)2}}\right)^3 \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (2 + 4\chi\delta^2 + \chi^2\delta^4) \left(\frac{22}{5} + \frac{56}{15} \frac{b}{\tau} + \frac{8}{15} \frac{b^2}{\tau^2}\right) \right] \sqrt{\frac{b}{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{b}{\tau}\right) \right\} + T_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $b = \frac{x_*^2}{4a_2}$ ,  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ .

Температурное поле в области полого цилиндра, определяемое формулами (13), (18), вызвано нагревом внешней средой и распределенными по поверхности  $r = R_1^*$  источниками тепла плотности

$$q = -\left( \kappa_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1^*} + \kappa_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x_*} \Big|_{x_*=0} \right),$$

где  $\kappa_2$  — коэффициент теплопроводности в области (2). Если учесть, что на поверхности  $r = R_1^*$  не должно быть никаких источников тепла, то на найденное температурное поле следует наложить температурное поле  $T^{(q)}$ , вызванное нагревом областей (1) и (2) поверхностными источниками плотности

$$\begin{aligned}
 (-q) = & -\frac{\chi W \exp(-\chi)}{c_1} \left\{ \frac{\kappa_2 \exp \chi \delta^2}{2 \sqrt{a_2 \pi \tau}} \left[ 4 \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} + \frac{8}{3} \left( \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} \right)^2 (1 + \chi \delta^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{16}{15} \left( \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} \right)^3 (2 + 4\chi \delta^2 + \chi^2 \delta^4) \right] - \frac{2\kappa_1}{R_1^*} \exp \left( -\frac{\chi \delta^2}{1 - \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}}} \right) \right\} \approx \\
 \approx & -\frac{\chi W \exp(-\chi)}{c_1} \left\{ \frac{\kappa_2 \exp \chi \delta^2}{2 \sqrt{a_2 \pi \tau}} \left[ 4 \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} + \frac{8}{3} \left( \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} \right)^2 (1 + \chi \delta^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{16}{15} \left( \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} \right)^3 (2 + 4\chi \delta^2 + \chi^2 \delta^4) \right] - \frac{2\kappa_1}{R_1^*} \exp \left[ \chi \delta^2 \left( 1 + \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} \right) \right] \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Влияние источников (19) на перераспределение температуры в области (2) с достаточной точностью может быть описано формулой

$$\begin{aligned}
 T^{(q)} = & -\frac{\chi W \exp[-\chi(1-\delta^2)]}{\sqrt{\pi} c_1} \left\{ 4\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} i^2 \operatorname{erfc} \frac{|x_*|}{2\sqrt{a_2 \tau}} + \right. \\
 & \left. + \frac{32}{3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \left( \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} \right)^2 (1 + \chi \delta^2) i^4 \operatorname{erfc} \frac{|x_*|}{2\sqrt{a_2 \tau}} + \right. \\
 & \left. + \frac{255}{15} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \left( \frac{\beta \tau}{R_2^{(0)2}} \right)^3 (2 + 4\chi \delta^2 + \chi^2 \delta^4) i^6 \operatorname{erfc} \frac{|x_*|}{2\sqrt{a_2 \tau}} - \right. \\
 & \left. - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \frac{a_1}{R_1^* \sqrt{a_2}} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp \left[ \frac{\chi \delta^2 \beta}{R_2^{(0)2}} (\tau - \eta) - \frac{x_*^2}{4a_2 \eta} \right] d\eta \right\}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

определяющей нагрев пространства, теплофизические характеристики которого совпадают с характеристиками области (2), источниками (19). Здесь  $\rho_2$ ,  $c_2$  — плотность и удельная теплоемкость материала в области (2);  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

Для доведения исследований до числа необходимо знать плотность, коэффициенты температуропроводности и удельной теплоемкости. Для рассматриваемого материала  $\rho_2 = 1,08 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_2 = 1,25 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с,  $c_2 = 1500$  Дж/кг · град. Так как с повышением температуры температуропроводность возрастает, а плотность и удельная теплоемкость практически не изменяются, для области (1) примем  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $c_1 = c_2$ ,  $a_1 = 4a_2 = 6 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с. При вычислениях принималось  $R_2^{(0)} = 16 \cdot 10^{-3}$  м,  $T_0 = 20^\circ$  С,  $\frac{c_1}{W} = 6 \times 10^{-4}$  1/град. Учитывая, что при  $T_* - T_0 = 1500^\circ$  С за 5 с нагрева радиус внешней поверхности уменьшается на  $1,4 \cdot 10^{-3}$  м, из формулы (10) находим  $\beta = 8,4 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/см ( $\chi = 4,2$ ), а из рис. 1 —  $\delta = 0,8$ . Значения  $\chi$  и  $\beta$ , вычисленные с использованием рис. 1, для различных значений температуры расплавленной стали приведены в таблице.

Уменьшение внешнего радиуса цилиндрической теплоизоляции со временем для различных значений температуры расплавленной стали  $T_* - T_0 = 1500, 1600, 1700^\circ$  С (кривые 1—3 соответственно) показано на

рис. 2. Результаты экспериментального исследования горения цилиндрической теплоизоляции при  $T_* - T_0 = 1500^\circ\text{C}$  отмечены крестиками.

Рис. 3 иллюстрирует распределение температуры по толщине области (2) для  $T_* - T_0 = 1500, 1600$  и  $1700^\circ\text{C}$  (кривые 1—3 соответственно). Рис. 3, а соответствует случаю, когда продолжительность погружения пер-

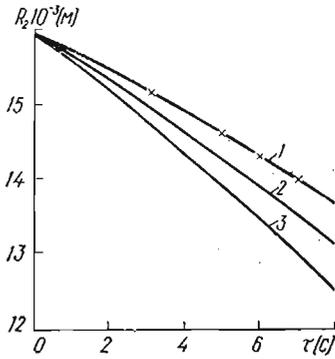


Рис. 2

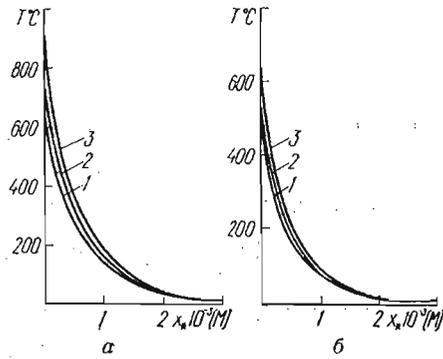


Рис. 3

вичного преобразователя в расплавленную сталь равна 7 с, а рис. 3, б — когда продолжительность погружения равна 5 с.

Из проведенных исследований следует, что необходимая оптимальная толщина цилиндрической теплоизоляции, обеспечивающая повышение температуры внутренней стенки не более чем на  $10^\circ\text{C}$  при семисекундном погружении в расплавленную сталь, температура которой  $T_* = 1720^\circ\text{C}$ , составляет  $5,45 \cdot 10^{-3}$  м, а при погружении на 5 с —  $5,1 \cdot 10^{-3}$  м. Необходимо отметить, что оптимальная толщина практически не изменяется по сравнению с вышеуказанной при уменьшении температуры расплавленной стали до  $1520^\circ\text{C}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Выш. школа», 1967. 599 с.
2. Лодиз Р., Паркер Р. Рост монокристаллов. М., «Мир», 1974. 429 с.
3. Любов Б. Я., Ройтбурд А. Л., Темкин Д. Е. Математический анализ процесса кристаллизации в телах простейшей формы. — В кн.: Рост монокристаллов. Т. 3. М., 1961, с. 68—79.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
15.XI 1976 г.

УДК 536.12 : 62—503.55

В. М. Вигак, А. В. Костенко

#### ОПТИМАЛЬНЫЙ НАГРЕВ ПЛАСТИНЫ И СФЕРЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ГРАДИЕНТЫ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Практически важной проблемой теории оптимального управления системами с распределенными параметрами является задача определения оптимального по быстродействию управления нестационарным температурным режимом твердого тела при ограничениях на управление, перепады и градиенты температурного поля, температурные напряжения и другие параметры [1, 2]. В данной статье рассматривается постановка и аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию управления нагревом (охлаждением) пластины и полый сферы при ограничениях на управление,