

поля t_1 — момента (τ_1) выхода на режим пластического деформирования и t_2 — момента (τ_2) создания требуемых термопластических деформаций (5), (6), а также вызванные ими напряжения σ [7] для области $0 \leq \beta \leq \beta_1$ локального нагрева и пластического деформирования $0 \leq \beta \leq \beta_0$ при $\epsilon_1^0(0) = 0,01$; $n = 2$, $m = 1$, $\sigma_s = 17$ кг/мм², $E = 7000$ кг/мм². Цифрами 1, 2, 3 обозначены температурные поля и напряжения для $\beta_1 = 0,3\pi$; $0,4\pi$; $0,5\pi$ соответственно при $\beta_0 = 0,05\pi$, $A_1 = 0,813$ (рис. 1) и $\beta_0 = 0,025\pi$, $A_1 =$

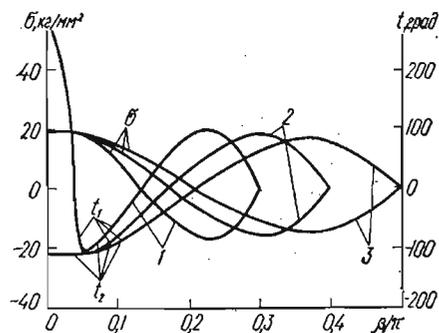


Рис. 1

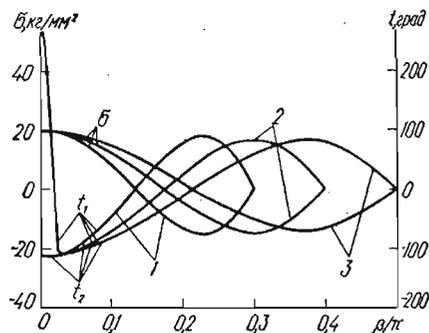


Рис. 2

$= 3,225$ (рис. 2). Из рисунков видно, что требование упругого деформирования оболочки для области $\beta_1 \leq \beta \leq \pi$ выполняется. Максимальные напряжения в области упругого деформирования при заданной ширине локального нагрева меньше для более узких зон термопластического деформирования, а при заданной области термопластического деформирования уменьшаются с увеличением зоны локального нагрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Беседина Л. П. Низкотемпературная термообработка зоны кольцевого шва в пластинке с круговым отверстием. — Автомат. сварка, 1975, № 5, с. 19—23.
2. Беседина Л. П., Тимошенко Н. Н. Оптимизация режимов низкотемпературной обработки пологой сферической оболочки. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 82—85.
3. Беседина Л. П. Определение оптимальных осесимметричных остаточных деформаций в оболочках вращения. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 80—83.
4. Беседина Л. П., Тимошенко Н. Н. Оптимальные пластические деформации в пологой сферической оболочке с кольцевым сварным швом. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 127—130.
5. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961. 228 с.
6. Ильющин А. А. Пластичность. Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1948. 376 с.
7. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
28.XII 1976 г.

УДК 539.377:539.312

Б. В. Гера

ОПТИМИЗАЦИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ЕЕ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Рассмотрим термоупругую цилиндрическую оболочку радиуса R и толщины $2h$, находящуюся под действием нормальной равномерно распределенной силовой нагрузки переменной во времени интенсивности $Q_n(\tau)$. При отсутствии перемещений в осевом направлении оболочки уравнение движения и обобщенное уравнение теплопроводности записываются [1, 2]

так:

$$\begin{aligned} \frac{R}{c_0^2} \frac{d^2 w}{d\tau^2} + \frac{w}{R} - \alpha(1+\nu)T - Q = 0, \\ \frac{1}{a} \frac{dT}{d\tau} + \frac{\text{Bi}}{h^2} T + \frac{\gamma_0}{aR} \frac{dw}{d\tau} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве начального принимаем условие

$$w = 0, \quad \frac{dw}{d\tau} = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (2)$$

Здесь $w(\tau)$ — радиальное перемещение оболочки; $T(\tau)$ — усредненная по толщине температура, отсчитываемая от начальной T_0 , равной температуре внешней среды; $Q(\tau) = \frac{1-\nu^2}{2hE} RQ_n(\tau)$; $\text{Bi} = \frac{\alpha_* h}{\lambda}$ — критерий Био; $a = \frac{\lambda}{c_V(1+\varepsilon)}$; λ — коэффициент теплопроводности; c_V — удельная теплоемкость единицы объема; $\gamma_0 = \frac{\alpha E T_0}{c_V(1+\varepsilon)(1-\nu)}$; $\varepsilon = \frac{\alpha^2 E T_0(1+\nu)}{c_V(1-2\nu)(1-\nu)}$; ν , α — коэффициенты Пуассона и линейного расширения; E — изотермический модуль упругости; $c_0^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$ — скорость распространения продольной волны.

Примем, что искомое распределение нормальной нагрузки $Q(\tau)$ является непрерывной функцией, которая удовлетворяет условиям

$$Q(0) = 0, \quad Q(\tau_*) = Q_*, \quad Q(\tau) = Q_* = \text{const} \quad \text{для } \tau > \tau_*. \quad (3)$$

Рассмотрим задачу об определении такого режима нагружения цилиндрической оболочки, при котором напряженно-деформированное состояние оптимально близко к квазистатическому. В этой связи функцию $Q(\tau)$ будем определять из условия минимума функционала

$$I = \int_0^{\tau_*} [(\sigma_{11} - \sigma_{11}^*)^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{22}^*)^2] d\tau, \quad (4)$$

где σ_{11} , σ_{22} — динамические, а σ_{11}^* , σ_{22}^* — квазистатические напряжения в оболочке, вызываемые силовым нагружением $Q_n(\tau)$. При этом

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{w}{R} - \alpha(1+\nu)T \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{R} - \alpha(1+\nu)T \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Квазистатические радиальные перемещения $w^*(\tau)$ и усредненная температура $T^*(\tau)$ определяются из соответствующей (1) системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{w^*}{R} - \alpha(1+\nu)T^* - Q = 0, \\ \frac{1}{a} \frac{dT^*}{d\tau} + \frac{\text{Bi}}{h^2} T^* + \frac{\gamma_0}{aR} \frac{dw^*}{d\tau} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

при начальном условии

$$T^*(0) = 0. \quad (7)$$

Учитывая выражения (5), функционал (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} I = \frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} \int_0^{\tau_*} \left\{ \left[\nu \frac{w-w^*}{R} - \alpha(1+\nu)(T-T^*) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{w-w^*}{R} - \alpha(1+\nu)(T-T^*) \right]^2 \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть на множество допустимых функций $Q(\tau)$ наложены дополнительно ограничения вида

$$\int_0^{\tau_*} \tau^i Q(\tau) d\tau = \kappa_i \quad (i = \overline{0, N}). \quad (9)$$

Таким образом, функционал I задан на множестве допустимых функций w, w^*, T, T^*, Q , которые связаны системой уравнений (1), (6) и условиями (3), (9).

Используя метод множителей Лагранжа [3], из условия минимума функционала I получаем дополнительно к (1), (6) уравнения Эйлера. После введения обозначений

$$f_1 = \frac{w}{R}, \quad g_1 = \alpha(1 + \nu)T, \quad f_2 = \frac{w - w^*}{R}, \quad g_2 = \alpha(1 + \nu)(T - T^*), \\ t = \frac{\tau}{\tau_*}, \quad c = \frac{R}{c_0 \tau_*}, \quad A = \text{Bi} \frac{a \tau_*}{h^2}, \quad \eta = \gamma_0 \alpha(1 + \nu)$$

полная система уравнений для определения экстремального решения запишется в виде

$$\begin{aligned} c^2 \frac{d^2 f_1}{dt^2} + f_1 - g_1 - Q &= 0, \\ \frac{dg_1}{dt} + A g_1 + \eta \frac{df_1}{dt} &= 0, \\ c^2 \frac{d^2 f_2}{dt^2} + f_2 - g_2 &= 0, \\ \frac{dg_2}{dt} + A g_2 + \eta \frac{df_2}{dt} &= 0, \\ c^2 \frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} + \lambda_1 - \gamma_0 \frac{d\lambda_2}{dt} + (1 + \nu^2) f_2 - (1 + \nu) g_2 &= 0, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} - A \lambda_2 + \alpha(1 + \nu) [\lambda_1 + (1 + \nu) f_2 - g_2] &= 0, \\ \gamma_0 \frac{dK_2}{dt} - K_1 + (1 + \nu^2) f_2 - (1 + \nu) g_2 &= 0, \\ \frac{dK_2}{dt} - A K_2 + \alpha(1 + \nu) [K_1 - (1 + \nu) f_2 + g_2] &= 0, \\ K_1 + \lambda_1 + \sum_{i=0}^N s_i t^i &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом из равенств (2), (3), (7) следуют условия

$$f_1 = 0, \quad \frac{df_1}{dt} = 0, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad Q = 0 \text{ при } t = 0, \quad Q = Q_* \text{ при } t = 1, \quad (11)$$

к которым необходимо присоединить экстремальные условия

$$\lambda_1 = 0, \quad K_1 = 0 \text{ при } t = 1. \quad (12)$$

Экстремальное решение системы уравнений (10) при $s_i = 0$ ($i = \overline{0, N}$), что соответствует отсутствию ограничений (9), запишется так:

$$\frac{w}{R} \equiv f_1 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 e^{-A_* t} + b_5 e^{A_* t} + b_6 e^{At},$$

$$Q = l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 q_1 e^{-A_* t} + b_5 q_2 e^{A_* t} + b_6 q e^{At} + b_7 e^{-At},$$

где

$$A_* = A \sqrt{\frac{1 + \nu^2}{(1 + \eta)^2 + (\nu + \eta)^2}}; \quad l_0 = b_0 + b_1 \frac{\eta}{A} + 2b_2 c^2 - \frac{m}{A};$$

$$l_1 = b_1 + 6b_3 c^2 + m; \quad l_2 = b_2 + b_3 \frac{3\eta}{A}; \quad m = \frac{2\eta}{A} \left(b_2 - \frac{3}{A} b_3 \right);$$

$$q_j = c^2 A_*^2 + \frac{A + (-1)^j A_* (1 + \eta)}{A + (-1)^j A_*} \quad (j = 1, 2), \quad q = 1 + \frac{\eta}{2},$$

а b_i ($i = 0, 7$) — постоянные интегрирования, определяемые из условий (11), (12). Тогда T находится из первого уравнения системы (1), а напряжения по формулам (5). При $t > 1$ ($\tau > \tau_*$), т. е. когда $Q(t) = Q_*$, получаем

$$\frac{\omega}{R} \equiv f_1 = Q_* [1 + d_1 e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} (d_2 \cos \varphi t + d_3 \sin \varphi t)].$$

Здесь $\rho = -\beta_1$ и $\rho = -\beta_2 \pm i\varphi$ — решения характеристического уравнения

$$\rho^3 + A\rho^2 + \frac{1+\eta}{c^2}\rho + \frac{A}{c^2} = 0,$$

а d_1, d_2, d_3 — постоянные, определяемые из условий сопряжения

$$f_1(1+0) = f_1(1-0), \quad \frac{df_1(1+0)}{dt} = \frac{df_1(1-0)}{dt}, \quad \frac{d^2 f_1(1+0)}{dt^2} = \frac{d^2 f_1(1-0)}{dt^2}.$$

Если пренебречь термоупругим рассеянием энергии, то, положив $\gamma_0 = 0$, $\eta = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, получим систему уравнений, соответствующую системе (10):

$$\begin{aligned} c^2 \frac{d^2 f_1}{dt^2} + f_1 - Q &= 0, \\ c^2 \frac{d^2 f_1}{dt^2} + f_2 &= 0, \\ c^2 \frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} + \lambda_1 + (1 + \nu^2) f_2 &= 0, \\ K_1 - (1 + \nu^2) f_2 &= 0, \\ K_1 + \lambda_1 + \sum_{i=0}^N s_i t^i &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

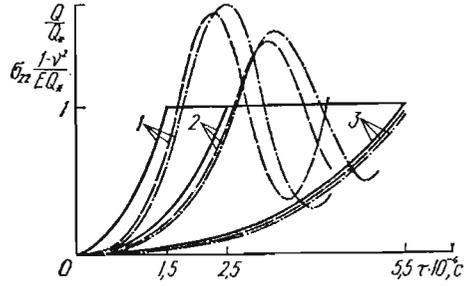


Рис. 1

Экстремальное решение этой системы при $s_i = 0$ и условиях (11) для $0 \leq t \leq 1$ запишется в виде

$$\frac{\omega}{R} \equiv f_1 = Q_0 t^3, \quad Q = Q_0 (t^3 + 6c^2 t), \quad Q_0 = \frac{1}{1 + 6c^2} Q_*.$$

При $t > 1$ имеем

$$\frac{\omega}{R} \equiv f_1 = Q_* \left[1 + \frac{3c}{1 + 6c^2} \left(\sin \frac{t-1}{c} - 2c \cos \frac{t-1}{c} \right) \right].$$

Численные расчеты произведены для оболочки с $h = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м, $R = 0,25$ м, $c_0 = 5300$ м/с, $\nu = 0,3$, $Vi = 0,175 \cdot 10^{-3}$, $\eta = 0,4355 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 0,13 \cdot 10^{-4}$ м²/с. Исследования показали, что оптимальные режимы нагружения с учетом термоупругого рассеяния и без его учета практически совпадают. На рис. 1 сплошные линии соответствуют отношению $\frac{Q}{Q_*}$ для $\tau_* = 1,5 \cdot 10^{-4}$ с (кривая 1), $\tau_* = 2,5 \cdot 10^{-4}$ с (кривая 2) и $\tau_* = 5,5 \times 10^{-4}$ с (кривая 3). Штриховыми и штрихпунктирными линиями представлены напряжения σ_{22} при оптимальных режимах нагружения для задачи с учетом и без учета термоупругого рассеяния соответственно. С увеличением τ_* амплитуда колебаний при $\tau > \tau_*$ ($t > 1$) уменьшается. При учете термоупругого рассеяния, как и следовало ожидать, амплитуда колебаний затухает во времени.

Системы уравнений (10) и (13) дают возможность найти такие оптимальные режимы нагружения, при которых для $t > 1$ напряженно-деформированное состояние оболочки совпадает с квазистатическим. Такое решение при $t = 1$ должно удовлетворять дополнительным условиям

$$\dot{f}_1 = Q_*, \quad \frac{df_1}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 f_1}{dt^2} = 0 \quad (14)$$

или

$$f_1 = Q_*, \quad \frac{df_1}{dt} = 0, \quad (15)$$

если задача решается в пренебрежении эффектом термоупругого рассеяния.

Построим указанное решение при условиях (15). Полагая в системе уравнений (13) $N = 1$ ($i = 0, 1$), получаем искомое экстремальное решение

$$\frac{w}{R} \equiv f_1 = Q_* (6t^5 - 15t^4 + 10t^3),$$

$$Q = f_1 + Q_* \cdot 60c^2 (2t^3 - 3t^2 + t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

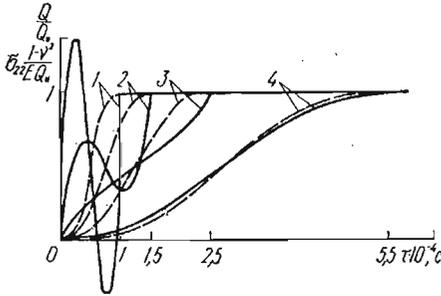


Рис. 2

При $t > 1$ имеем $f_1 = Q_*$, $Q = Q_*$.

На рис. 2 сплошными линиями для показаны функции нагружения Q для цилиндрической оболочки с указанными выше параметрами при $\tau_* = 10^{-4}$ с (кривая 1), $\tau_* = 1,5 \cdot 10^{-4}$ с (кривая 2), $\tau_* = 2,5 \cdot 10^{-4}$ с (кривая 3) и $\tau_* = 5,5 \cdot 10^{-4}$ с (кривая 4). Штриховыми линиями даны соответствующие им напряжения σ_{22} .

Характерной особенностью полученных решений является то, что

в исследованном диапазоне τ с уменьшением времени нагружения τ_* максимальные значения Q увеличиваются и могут быть больше их величины при $\tau > \tau_*$. В то же время напряжения σ_{22} не превышают их значений при $\tau > \tau_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
2. Швец Р. Н. Осесимметричные термоупругие колебания цилиндрической оболочки.— Прикл. механика, 1969, 5, № 3, с. 23—30.
3. Бурак Я. И., Будз С. Ф. Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки.— Прикл. механика, 1971, 10, № 2, с. 14—20.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
23.XII 1976 г.

УДК 536.21

Б. П. Галапац, И. П. Куритный, Е. Я. Чапля

ОПТИМИЗАЦИЯ ТОЛЩИНЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ТЕМПЕРАТУРУ ВНУТРЕННЕЙ СТЕНКИ

При решении некоторых технических задач представляет интерес оптимизация толщины цилиндрической теплоизоляции при условии, что температура внутренней стенки цилиндра не должна превышать определенного значения, тогда как внешняя поверхность цилиндра подвергается действию высоких температур и даже горению. Например, при измерении температуры расплавленной стали (1500—1700° С) используются термоэлектрические термометры, состоящие из сменного первичного преобразователя, рассчитанного на разовое (в течение 5—7 с) погружение в жидкую сталь, и жезла, который можно использовать несколько тысяч раз. Особенностью этих термометров является использование бумажных шпупов, защищающих от перегрева контактное устройство.

Настоящая работа посвящена определению и исследованию темпера-