

7. Нигул У. К. О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит.— Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, 1963, 12, № 2, с. 146—155.
8. Пелех Б. Л., Тетерс Г. А. О динамическом изгибе пластинок, слабо сопротивляющихся сдвигу.— Механика полимеров, 1968, № 4, с. 698—704.
9. Подстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
10. Селезов И. Т. Дослідження поперечних коливань пластин.— Прикл. механіка, 1960, 6, № 3, с. 319—327.
11. Швец Р. Н., Грицай С. В. Некоторые динамические задачи изгиба анизотропных плит с включениями.— VII Науч. конф. по применению ЭВМ в механике деформируемого твердого тела. 30 сент. 1975 г. Тез. докл. Часть 2. Ташхент, 1975, с. 72—73.
12. Швец Р. Н., Грицай С. В. Динамические напряжения в трансверсально-изотропной пластинке с кольцом равных круговых отверстий.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 57—61.
13. Швец Р. Н. Применение операторного метода в динамических задачах термоупругости пластин постоянной толщины.— В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. К., 1977, с. 18—25.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.III 1976 г.

УДК 539.377

С. Ф. Будз, Я. И. Бурак, Е. М. Ирза

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ РЕЖИМОВ НАГРЕВА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ВО ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОТДАЧИ

Определим оптимальные по напряжениям режимы нагрева по толщине замкнутой сферической оболочки, на внутренней поверхности которой имеет место конвективный теплообмен при переменном во времени коэффициенте теплоотдачи. Функцией управления является температура внешней поверхности оболочки. Температура оболочки отсчитывается от начальной, равной температуре среды. Решение задачи для случая постоянного коэффициента теплоотдачи рассмотрено ранее*.

Примем следующие ограничения на температуру $t_1(u)$ внешней поверхности и температурные напряжения.

Функция $t_1(u)$ для $0 \leq u \leq u_k$ неотрицательна и ограничена значением t_0 , а для $u \geq u_k$ равна t_k , т. е.

$$0 \leq t_1(u) \leq t_0 \text{ для } 0 \leq u \leq u_k; \quad t_1(u) = t_k \text{ для } u \geq u_k. \quad (1)$$

Изменение во времени функции $t_1(u)$ ограничено системой функциональных условий вида

$$\int_0^{u_k} u^i t_1(u) du = A_i \quad (i = \overline{0, n}), \quad (2)$$

где A_i — некоторые постоянные; u_k — момент окончания нагрева.

Температурные напряжения $\sigma_s = \sigma_\beta \equiv \sigma(\gamma, u)$ на внешней $\sigma^+ = \sigma(h, u)$ и внутренней $\sigma^- = \sigma(-h, u)$ поверхностях изменяются в заданных пределах:

$$\sigma_1^+ \leq \sigma^+ \leq \sigma_2^+, \quad \sigma_1^- \leq \sigma^- \leq \sigma_2^-, \quad (3)$$

где $\sigma_1^+ \leq 0$, $\sigma_2^+ \geq 0$, $\sigma_1^- \leq 0$, $\sigma_2^- \geq 0$, $u = \tau/a^2 h^2$; τ — время; a^{-2} — коэффициент температуропроводности; $2h$ — толщина оболочки; σ_s, σ_β — меридиональные и кольцевые напряжения на внешней $\gamma=h$, σ^+ и внутренней

* Бурак Я. И., Будз С. Ф., Мирончук Ю. Г., Ирза Е. М. Оптимизация режимов нагрева сферической оболочки.— Науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». Канев, 1974, с. 44—50.

$\gamma = -h$, σ^- — поверхностях оболочки; γ — координата по толщине оболочки, отсчитываемая от срединной поверхности.

Функции t_1 и σ^\pm с учетом ограничений (1), (3) представим в виде

$$t_1(u) = \frac{t_0}{2} (\sin \varphi_1(u) + 1),$$

$$\sigma^+ = \frac{\sigma_2^+ - \sigma_1^+}{2} \left(\sin \varphi_2(u) + \frac{\sigma_2^+ + \sigma_1^+}{\sigma_2^+ - \sigma_1^+} \right), \quad \sigma^- = \frac{\sigma_2^- - \sigma_1^-}{2} \left(\sin \varphi_3(u) + \frac{\sigma_2^- + \sigma_1^-}{\sigma_2^- - \sigma_1^-} \right), \quad (4)$$

где $\varphi_i(u)$ — некоторые функции.

При решении задачи в качестве исходной используем систему уравнений теплопроводности

$$\begin{aligned} & \frac{1}{15} \frac{dT_*}{du} + \frac{1}{3} \frac{dT}{du} + T_* + T = t_1(u), \\ & -\frac{2}{5} \left(1 + \frac{\text{Bi}(u)}{6} \right) \frac{dT_*}{du} + \left(1 + \frac{\text{Bi}(u)}{3} \right) \frac{dT}{du} - (1 + \text{Bi}(u)) T_* + \\ & \quad + \text{Bi}(u) T = \text{Bi}(u) t_c(u), \\ & -\frac{2}{5} \frac{dT_*}{du} + \frac{dT}{du} - T_* = \frac{1}{S} \frac{dt_c(u)}{du}, \end{aligned} \quad (5)$$

которая соответствует кубическому закону распределения температур по толщине оболочки, т. е.

$$t(\gamma, u) = \frac{\gamma}{2h} \left(\frac{\gamma^2}{3h^2} - \frac{1}{5} \right) \frac{dT_*}{du} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) \frac{dT}{du} + \frac{\gamma}{h} T_* + T. \quad (6)$$

Здесь T , T_* — усредненные по толщине оболочки температура и температурный момент; $t_c(u)$ — температура среды внутри оболочки; $\text{Bi}(u) = \beta(u) \times h$ — критерий Био; $\beta(u)$ — относительный коэффициент теплообмена; $S = 3\lambda\alpha^2 h^2 / C_c \rho_c R$; λ — коэффициент теплопроводности материала оболочки; C_c, ρ_c — удельная теплоемкость и плотность среды; R — радиус внутренней поверхности оболочки. Последнее уравнение (5) получено из условия, что поток тепла через поверхность $\gamma = -h$ обуславливает соответствующее изменение температуры внутри оболочки.

Напряженное состояние свободной от силовой нагрузки сферической оболочки определяется по формуле

$$\sigma = \frac{E\alpha}{1-\nu} (T - t), \quad (7)$$

где E — модуль упругости; α — коэффициент линейного температурного расширения; ν — коэффициент Пуассона.

Сформулированная выше задача решается с использованием методов вариационного исчисления на основе минимизации функционала энергии упругой деформации оболочки

$$M = \frac{8\pi R^2 h E \alpha}{3(1-\nu)} \int_0^{u_k} \left[\frac{1}{15} \left(\frac{dT}{du} \right)^2 + (T_*)^2 + \frac{1}{525} \left(\frac{dT_*}{du} \right)^2 \right] du, \quad (8)$$

заданного на множестве допустимых функций T , T_* , которые связаны с функцией уравнения $t_1(u)$ и температурой $t_c(u)$ среды внутри оболочки уравнениями (5).

Из необходимого условия экстремума функционала M с учетом ограничений (5) и представления (4) для функций t_1 и σ^\pm получим систему уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} & \frac{2}{15} \frac{d^2 T}{du^2} + \left(\frac{1}{3} \frac{d}{du} - 1 \right) \lambda_1(u) + \frac{1}{3} \frac{d}{du} (\lambda_2(u) + \lambda_3(u) - 3\lambda_5(u)) + \\ & \quad + \left[\left(1 + \frac{\text{Bi}(u)}{3} \right) \frac{d}{du} - \text{Bi}(u) + \frac{1}{3} \frac{d \text{Bi}(u)}{du} \right] \lambda_4(u) = 0, \end{aligned}$$

$$2 \left(\frac{1}{525} \frac{d^2}{du^2} - 1 \right) T_* + \left(\frac{1}{15} \frac{d}{du} - 1 \right) (\lambda_1(u) + \lambda_2(u) - \lambda_3(u)) + \\ + \left(\frac{2}{5} \frac{d}{du} - 1 \right) \lambda_5(u) - \left[\frac{2}{5} \left(1 - \frac{\text{Bi}(u)}{6} \right) \frac{d}{du} - 1 - \text{Bi}(u) + \right. \\ \left. + \frac{1}{15} \frac{d \text{Bi}(u)}{du} \right] \lambda_4(u) = 0, \quad (9)$$

$$\left(\lambda_1(u) - \sum_{i=0}^n \lambda_{i0} u^i \right) \cos \varphi_1(u) = 0,$$

$$\lambda_2(u) \cos \varphi_2(u) = 0, \quad \lambda_3(u) \cos \varphi_3(u) = 0,$$

$$\frac{d\lambda_5(u)}{du} + \text{Bi}(u) S\lambda_4(u) = 0,$$

которая вместе с уравнениями (5), (7) и условиями (1) — (3) составляет полную систему уравнений для определения оптимальных режимов нагрева и соответствующих им температурных напряжений.

Рассмотрим решение задачи для случая, когда функция $\text{Bi}(u)$ является кусочно-постоянной и представляется в виде

$$\text{Bi}(u) = \sum_{j=0}^n \text{Bi}_j [S_+(u_{j+1} - u) - S_+(u_j - u)], \quad (10)$$

где $S_+(u)$ — единичная функция; $\text{Bi}_j = \text{const}$; $u_0 = 0$; $u_k = u_n$. В данном случае задачу определения искомого решения нагрева можно свести к решению системы уравнений (5), (9) для каждого из промежутков времени $u_{j-1} < u < u_j$, на которых коэффициент теплоотдачи сохраняет постоянное значение

$$\frac{1}{15} \frac{dT_*}{du} + \frac{1}{3} \frac{dT}{du} + T_* + T = t_1(u), \\ - \frac{2}{5} \left(1 + \frac{\text{Bi}_j}{6} \right) \frac{dT_*}{du} + \left(1 + \frac{\text{Bi}_j}{3} \right) \frac{dT}{du} - (1 + \text{Bi}_j) T_* + \text{Bi}_j T = \text{Bi}_j t_c(u), \quad (11)$$

$$- \frac{2}{5} \frac{dT_*}{du} + \frac{dT}{du} - T_* = \frac{1}{S} \frac{dt_c(u)}{du};$$

$$\frac{2}{15} \frac{d^2 T}{du^2} + \left(\frac{1}{3} \frac{d}{du} - 1 \right) \lambda_1(u) + \frac{1}{3} \frac{d}{du} (\lambda_2(u) + \lambda_3(u) - 3\lambda_5(u)) + \\ + \left[\left(1 + \frac{\text{Bi}_j}{3} \right) \frac{d}{du} - \text{Bi}_j \right] \lambda_4(u) = 0,$$

$$2 \left(\frac{1}{525} \frac{d^2}{du^2} - 1 \right) T_* + \left(\frac{1}{15} \frac{d}{du} - 1 \right) (\lambda_1(u) + \lambda_2(u) - \lambda_3(u)) + \\ + \left(\frac{2}{5} \frac{d}{du} - 1 \right) \lambda_5(u) - \left[\frac{2}{5} \left(1 + \frac{\text{Bi}_j}{6} \right) \frac{d}{du} - 1 - \text{Bi}_j \right] \lambda_4(u) = 0, \quad (12)$$

$$\left(\lambda_1(u) - \sum_{i=0}^n \lambda_{i0} u^i \right) \cos \varphi_1(u) = 0,$$

$$\lambda_2(u) \cos \varphi_2(u) = 0, \quad \lambda_3(u) \cos \varphi_3(u) = 0,$$

$$\frac{d\lambda_5(u)}{du} + \text{Bi}_j S\lambda_4(u) = 0.$$

Поскольку функция $t(\gamma, u)$ должна быть непрерывной, то на основании (6) при $u = u_j$ функции T , $\frac{dT}{du}$, T_* , $\frac{dT_*}{du}$, t_c , $\frac{dt_c}{du}$ должны удовлетворять условиям сопряжения

$$T(u_j - 0) = T(u_j + 0), \quad \frac{dT(u_j - 0)}{du} = \frac{dT(u_j + 0)}{du},$$

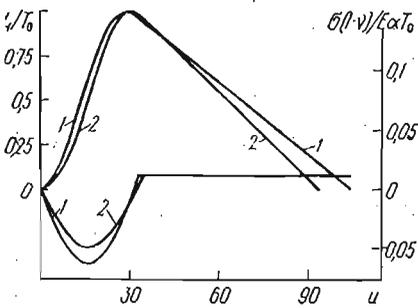
$$T_*(u_j - 0) = T_*(u_j + 0), \quad \frac{dT_*(u_j - 0)}{du} = \frac{dT_*(u_j + 0)}{du}, \quad (13)$$

$$t_c(u_j - 0) = t_c(u_j + 0), \quad \frac{dt_c(u_j - 0)}{du} = \frac{dt_c(u_j + 0)}{du}.$$

В качестве примера определим оптимальные режимы нагрева сферической оболочки для случая, когда температура $t_1(u)$ внешней поверхности оболочки равна нулю в начальный момент времени $u = 0$, а при $u = u_k$ $t_1(u_k) = t_k$. При $u = u_m$, где $0 \leq u_m \leq u_k$, $t_1(u)$ достигает максимального значения, равного t_0 , т. е.

$$t_1(u_m) = t_0, \quad \frac{dt_1(u_m)}{du} = 0. \quad (14)$$

Пусть при искомом режиме нагрева температурные напряжения σ на внутренней σ^- и сжимающие на внешней σ^+ поверхностях не превышают допустимых. В этом случае необходимо учитывать только ограничения на



растягивающие напряжения на внешней поверхности оболочки. Предположим, что растягивающие напряжения на внешней поверхности меньше допустимых. Тогда $\cos \varphi_1(u) \neq 0$, $\cos \varphi_2(u) \neq 0$, $\cos \varphi_3(u) \neq 0$. Искомое экстремальное решение находим из системы уравнений (11), (12) при $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_{00} + \lambda_{10}u$.

Если для найденного экстремального решения растягивающие температурные напряжения σ^+ при некотором значении $u = u_{02}$ ($u_{02} > u_m$) достигают значения, равного σ_2^+ , а для $u > u_{02}$ $\sigma^+ > \sigma_2^+$ и в указанном диапазоне $0 < t^+ < t_0$, то из анализа уравнений Эйлера (12) следует, что для удовлетворения условий (3) согласно (4) необходимо перейти на режим нагрева, при котором растягивающие напряжения σ^+ на внешней поверхности оболочки равны допустимым σ_2^+ , т. е. $\sigma^+ = \sigma_2^+$. В рассматриваемом случае оптимальные режимы нагрева начиная с момента времени $u = u_{02}$ определяются из системы уравнений

$$-\frac{2}{5} \left(1 + \frac{Bi_j}{6}\right) \frac{d^2 T_*}{du^2} + \left(1 + \frac{Bi_j}{3}\right) \frac{d^2 T}{du^2} + \left(\frac{2}{5} Bi_j S - Bi_j - 1\right) \frac{dT_*}{du} +$$

$$+ Bi_j (1 - S) \frac{dT}{du} + Bi_j S T_* = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{15} \frac{dT_*}{du} + \frac{1}{3} \frac{dT}{du} + T_* + \frac{1-\nu}{\alpha E} \sigma_2^+ = 0.$$

Численный анализ оптимальных тепловых режимов и соответствующих температурных напряжений на внешней поверхности оболочки выполнен для функции $Bi(u)$, заданной в виде $Bi(u) = S_+(u_* - u)$ ($0 < u_* \leq u_m$) для параметра $S = 150, 100, 50, 10$ при $u_* = 0,5u_m$, $u_* = 0,75u_m$, $u_* = u_m$. Для сравнения выполнены исследования решения задачи в предельном случае при $Bi = 0$ (теплоизоляция на внутренней поверхности оболочки). Исследования для значений параметра $S = 150, 100, 50$ показали, что влияние параметра u_* на изменение во времени и по величине оптимальных режимов нагрева и соответствующих температурных напряжений незначительно. Эти результаты представлены на рисунке кривыми 1. При этом оптимальные режимы нагрева практически совпадают с найденными при условии теплоизоляции на внутренней поверхности оболочки. Кривыми 2 представлены оптимальные режимы нагрева и соответствующие температурные напряжения для $S = 10$ при $u_* = u_m$. Продолжительность процесса

нагрева в последнем случае при одном и том же уровне допустимых растягивающих напряжений на внешней поверхности приблизительно на 10% меньше аналогичной в условиях теплоизоляции на внутренней поверхности оболочки.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.111 1977 г.

УДК 621.785.2 : 621.791.053

Л. П. Беседина, Н. И. Полищук

**ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ОБРАБОТКЕ
ЗОНЫ МЕРИДИОНАЛЬНОГО СВАРНОГО ШВА
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Основы методики аналитического определения режимов низкотемпературной обработки тонких сварных пластин и пологих оболочек предложены в работах [1, 2]. В настоящей работе с использованием этой методики исследуется вопрос о снятии остаточных напряжений в сваренной вдоль меридиана цилиндрической оболочке, находящейся в условиях плоской деформации.

Пусть длинная цилиндрическая оболочка радиуса R , толщины $2h$ с меридиональным сварным швом находится в условиях плоского напряженного состояния, обусловленного изменяющимися в кольцевом направлении остаточными сварочными деформациями. Рассмотрим задачу определения дополнительных термопластических деформаций, которые вместе с заданными начальными сварочными обеспечивают оптимально низкий уровень остаточных напряжений. Для их определения используем условие минимизации функционала энергии упругой деформации оболочки [3—5].

В рассматриваемом случае энергия упругой деформации оболочки, рассчитанная на единицу длины в осевом направлении, представляется в виде функционала

$$K = \frac{1}{2D_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left[N_1^2 - 2\nu N_1 N_2 + N_2^2 + \frac{3}{h^2} (M_1^2 - 2\nu M_1 M_2 + M_2^2) \right] d\beta, \quad (1)$$

где $D_0 = 2Eh$; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; N_1 , N_2 — компоненты усилий; M_1 , M_2 — компоненты моментов, которые связаны [7] уравнениями равновесия

$$\frac{dN_2}{d\beta} + \frac{1}{R} \frac{dM_2}{d\beta} = 0, \quad N_2 = \frac{1}{R} \frac{d^2 M_2}{d\beta^2} \quad (2)$$

и совместности деформаций

$$\begin{aligned} \frac{3R}{D_0 h^2} \frac{d}{d\beta} (M_1 - \nu M_2) - \frac{1}{D_0} \frac{d}{d\beta} (N_1 - \nu N_2) + \frac{d}{d\beta} (R\kappa_1^{(p)} - \varepsilon_1^{(p)}) &= \\ &= \frac{d}{d\beta} (\varepsilon_1^{(0)} - R\kappa_1^{(0)}), \\ \frac{3R}{D_0 h^2} (M_1 - \nu M_2) + \frac{1}{D_0} \frac{d^2}{d\beta^2} (N_1 - \nu N_2) + R\kappa_1^{(p)} + \frac{d^2}{d\beta^2} \varepsilon_1^{(p)} &= \\ &= -R\kappa_1^{(0)} - \frac{d^2}{d\beta^2} \varepsilon_1^{(0)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_1^{(p)}$, $\kappa_1^{(p)}$ и $\varepsilon_1^{(0)}$, $\kappa_1^{(0)}$ — искомые пластические и начальные сварочные деформации.

Ставится вариационная задача о минимизации функционала энергии упругой деформации (1) на множестве допустимых функций усилий и