УДК 532.72:536.21

Р. Н. Швец, Я. И. Дасюк

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОДИФФУЗИИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Формулировка динамических задач для деформируемого твердого тела с учетом диффузионных процессов в вариационном виде без начальных условий дана в работе [8]. Однако динамические задачи естественно формулировать как задачи с начальными условиями. В связи с этим при формулировке линейных динамических задач теории упругости с начальными условиями в вариационной форме Гуртин [11] отказался от традиционного вида скалярного произведения и ввел билинейную форму в виде свертки. Это позволило сформулировать достаточно общий вариационный принцип для линейной взаимосвязанной задачи термоупругости [12] и для произвольного момента времени. Другой подход, в котором отпадает необходимость сводить краевую динамическую задачу теории упругости к эквивалентной граничной задаче при формулировке вариационных принципов, был применен Айнолой [1].

В настоящей работе, следуя работам [1, 11, 12], установлены общие вариационные принципы для смешанной динамической задачи термодиффузии для деформируемых твердых тел. С использованием вариационной формулировки смешанной задачи термодиффузии для деформируемых твердых тел в перемещениях установлена теорема взаимности.

Исходные уравнения. Рассмотрим в бесконечном трехмерном евклидовом пространстве регулярную область V ($\overline{V} = V \cup \Sigma$), ограниченную поверхностью Σ с единичной нормалью $\vec{n}$ и занятую деформируемым твердым телом (двухкомпонентным раствором). Взаимодействие рассматриваемого твердого тела с внешней средой приводит к возникновению в нем поля перемещения $\vec{u}(x, \tau)$, потоков энтропии $\vec{q}^s(x, \tau)$ и массы $\vec{k}(x, \tau)$ растворенного вещества, а также к изменению температуры $t(x, \tau)$ и энтропии $s(x, \tau)$, химического потенциала $\mu(x, \tau)$ и концентрации $c(x, \tau)$ растворенного вещества, напряжений $\sigma_{ij}(x, \tau)$ и деформаций $e_{ij}(x, \tau)$ как функций координат $x = \{x_i\}$ и времени τ. Эти функции, как известно, при описании термодинамического состояния тела должны принадлежать к определенному классу функций $C^{M,N}$ и удовлетворять соответствующим уравнениям поля и краевым условиям.

Будем говорить, что $f \in C^{M,N}$, если f определена в области $\overline{V}$ при всех $\tau \geqslant 0$ и $\dfrac{\partial^m}{\partial x_i \partial x_j \ldots \partial x_m}\left(\dfrac{\partial^n f}{\partial \tau^n}\right)$ существуют и непрерывны для $m = 0, 1, \ldots, M$; $n = 0, 1, \ldots, N$ и $n + m \leqslant \max\{M, N\}$.

Если предположить, что функции

$$u_i \in C^{1,2};\quad k_i,\ q_i^s \in C^{1,0};\quad e_{ij} \in C^{0,0};\quad \sigma_{ij},\ t,\ \mu \in C^{1,0};\quad s, c \in C^{0,1};$$
$$e_{ij} = e_{ji};\quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \tag{1}$$

то физико-механическое состояние деформируемого твердого тела с учетом процесса термодиффузии описывается [5] в области V при $\tau > 0$ уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{2}$$

уравнениями баланса энтропии и массы

$$\rho \dot{s} = -q^s_{i,i} + W_0,\quad \rho \dot{c} = -k_{i,i} + V_0, \tag{3}$$

кинематическими уравнениями

$$q_i^s = -\frac{\lambda}{T_0} t_{,i}, \quad k_i = -\frac{L}{T_0}\mu_{,i}, \tag{4}$$

в области $\bar{V}$ при $\tau \geqslant 0$ геометрическими соотношениями

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{(i,j)}, \tag{5}$$

уравнениями состояния

$$\sigma_{ij} = \left(K^{s,c} - \frac{2}{3}G\right) e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} + (\alpha_i^{e,c}s + \alpha_c^{e,s}c)\,\delta_{ij}, \tag{6}$$

$$t = \frac{T_0}{C^{e,c}} s + \frac{1}{\rho}\alpha_s^{e,c} e_{\alpha\alpha} + d_s^{e,c} c, \tag{7}$$

$$\mu = d_c^{e,s} c + \frac{1}{\rho}\alpha_c^{e,s} e_{\alpha\alpha} + d_s^{e,c} s \tag{8}$$

в области V при $\tau = 0$

$$u_i(x, 0) = a_i(x), \quad \dot{u}_i(x, 0) = b_i(x), \tag{9}$$

$$s(x, 0) = s_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x) \tag{10}$$

и на поверхности $\Sigma\,(\Sigma_\sigma \cup \Sigma_u = \Sigma_q \cup \Sigma_t = \Sigma_k \cup \Sigma_\mu = \Sigma,\ \Sigma_\sigma \cap \Sigma_u = \Sigma_q \cap \Sigma_t = \Sigma_k \cap \Sigma_\mu = 0)$ при $\tau \geqslant 0$

$$\sigma_{ij}n_j = \sigma_i = \bar{\sigma}_i, \quad x \in \Sigma_\sigma, \ u_i = \bar{u}_i, \ x \in \Sigma_u, \tag{11}$$

$$\frac{T_0}{\lambda_\Sigma} q_n^s + t_c - t = 0, \quad x \in \Sigma_t, \ q_n^s = \bar{q}_n, x \in \Sigma_q, \tag{12}$$

$$\frac{T_0}{L_\Sigma} k_n + \mu_c - \mu = 0, \quad x \in \Sigma_\mu, \ k_n = \bar{k}, \ x \in \Sigma_k. \tag{13}$$

Здесь u_i — компоненты вектора перемещения; q_i^s и k_i — компоненты векторов потока энтропии и массы соответственно; W_0 и V_0 — плотность объемных источников тепла и массы; T_0 — температура исходного состояния; t_c, μ_c — температура и химический потенциал диффундирующего вещества внешней среды; X_i — компоненты массовой силы; n_i — компонента единичной нормали; ρ — плотность; δ_{ij} — символ Кронекера; $\alpha_s^{e,c} = -\frac{T_0}{C^{e,c}}\beta_T^{\sigma,c}K^{T,c}$; $\alpha_c^{e,c} = -\beta_c^{\sigma,s}K^{T,c}$; λ — теплопроводность; L — кинетический коэффициент диффузионной подвижности растворенного вещества; $K^{s,c}$, $K^{T,c}$ — модули объемного сжатия при постоянной концентрации вещества и энтропии или температуре соответственно; G — модуль сдвига; $C^{e,c}$ — удельная теплоемкость при постоянных объеме и концентрации вещества; $\beta_T^{\sigma,c}$, $\beta_c^{\sigma,s}$ — температурный и концентрационный коэффициенты объемного расширения при постоянных напряжении и концентрации или энтропии соответственно; $d_c^{e,s}$, $d_s^{e,c}$ — коэффициенты, характеризующие зависимость химического потенциала растворенного вещества от концентрации и энтропии; λ_Σ, L_Σ — значения коэффициентов теплопроводности и диффузионной подвижности растворенного вещества на поверхности Σ; значение и физический смысл остальных введенных здесь и ниже коэффициентов и связь между ними указаны в работе [6]; точка над знаком функции обозначает дифференцирование ее по времени; индекс после запятой внизу при знаке функции обозначает дифференцирование ее по соответствующей декартовой координате, а по повторяющимся индексам производится суммирование; круглые скобки, которые включают пару индексов, обозначают симметрию этих индексов (5).

Физико-механическое состояние среды, которое описывается системой функций $Q = \{u_i, q_i^s, k_i, e_{ij}, s, c, \sigma_{ij}, t, \mu\}$, определенных в области $\bar{V}$ при

$\tau \geqslant 0$ и обладающих свойством (1), будем называть допустимым состоянием. Под решением смешанной динамической задачи термодиффузии деформируемых твердых тел будем понимать допустимое состояние, которое удовлетворяет уравнениям поля (2) — (8) при краевых условиях (9) — (13).

Вариационные принципы. Уравнения поля (2) — (8) и краевые условия (9) — (13), которые полностью определяют решение смешанной динамической задачи для деформируемого твердого тела, в котором происходит процесс термодиффузии, можно получить как уравнения Эйлера — Лагранжа при нахождении стационарного значения некоторого функционала.

Определим на множестве допустимых состояний $\mathfrak{K}$ для каждого $\tau \geqslant 0$ функционал по формуле

$$\Omega\{Q\} = \int\limits_V \Big[\frac{1}{2}\Big(K^{s,c} - \frac{2}{3}G\Big) e_{\alpha\alpha} * e_{\alpha\alpha} + G e_{ij} * e_{ij} + \frac{1}{2}\rho\frac{T_0}{C^{e,c}} s * s +$$

$$+ \frac{1}{2}\rho d_c^{e,c} c * c + \rho d_s^{e,c} c * s + (\alpha_s^{e,c} s + \alpha_c^{e,c} c) * e_{\alpha\alpha} - \sigma_{ij} * e_{ij} -$$

$$- \rho s * t - \rho c * \mu - (\sigma_{ij,j} + X_i) * u_i + W_1 * t + V_1 * \mu + \frac{T_0}{2} *$$

$$* \Big(\frac{1}{\lambda} q_i^s * q_i^s + \frac{1}{L} k_i * k_i\Big) + 1 * (q_i^s * t_{,i} + k_i * \mu_{,i}) + \rho \dot{u}_i(x, \tau)\,[u_i(x, 0) -$$

$$- a_i] - \rho b_i u_i(x, \tau) + \frac{\rho}{2}\dot{u}_i * \dot{u}_i\Big] dV + \int\limits_{\Sigma_u} \sigma_i * \bar{u}_i d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_\sigma} (\sigma_i - \bar{\sigma}_i) * u_i d\Sigma +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_t} 1 * \Big(\frac{T_0}{2\lambda_\Sigma} q_n^s + t_c - t\Big) * q_n d\Sigma - \int\limits_{\Sigma_q} 1 * \bar{q}_n * t d\Sigma + \qquad (14)$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_\mu} 1 * \Big(\frac{T_0}{2L_\Sigma} k_n + \mu_c - \mu\Big) * k_n d\Sigma - \int\limits_{\Sigma_k} 1 * \bar{k}_n * \mu d\Sigma.$$

Здесь обозначено:

$$v * w = \int\limits_0^\tau v(x, \tau - \tau_0)\, w(x, \tau_0)\, d\tau_0, \quad W_1 = 1 * W_0 + s_0, \quad V_1 = 1 * V_0 + c_0.$$

Известно [3], что каждой краевой задаче вариационного типа соответствует не один, а целое множество функционалов. Переход от одного функционала к другому осуществляется с помощью некоторых преобразований. Назначение этих преобразований — переводить дополнительные соотношения, которым должны удовлетворять допустимые состояния, в уравнения Эйлера — Лагранжа и в известные краевые условия. И наоборот, в качестве дополнительных соотношений могут выступать и уравнения поля и краевые условия, которым должны удовлетворять допустимые состояния.

Рассмотрим вариационный принцип на множестве допустимых состояний $\mathfrak{K}$, которые первоначально не удовлетворяют каким-либо уравнениям поля и краевым условиям. Так как уравнения баланса (3) с начальными условиями (10) эквивалентны уравнениям

$$\rho s = -1 * q_{i,i}^s + W_1, \quad \rho c = -1 * k_{i,i} + V_1, \qquad (15)$$

то имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы некоторое допустимое состояние $Q = \{u_i, q_i^s, k_i, e_{ij}, s, c, \sigma_{ij}, t, \mu\}$ $(Q \in \mathfrak{K})$ являлось решением задачи (2) — (13), необходимо и достаточно, чтобы на $\mathfrak{K}$ выполнялось условие

$$\delta\Omega\{Q\} = 0, \quad \tau \geqslant 0. \qquad (16)$$

Доказательство. Определив вариацию функционала (14) с учетом свойств свертки и теоремы Гаусса — Остроградского, получим

$$\delta\Omega\{Q\} = \int_V \Big\{\Big[\Big(K^{s,c} - \frac{2}{3}G\Big)e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} + (\alpha_s^{e,c}s + \alpha_c^{e,s}c)\delta_{ij} - \sigma_{ij}\Big] * \delta e_{ij} -$$

$$- (\sigma_{ij,j} + X_i - \rho\ddot{u}_i) * \delta u_i - (e_{ij} - u_{(i,j)}) * \sigma_{ij} + \rho[u_i(x,0) - a_i]\delta\dot{u}_i(x,\tau) +$$

$$+ [\dot{u}_i(x,0) - b_i]\delta u_i(x,\tau) + \rho\Big(\frac{T_0}{C^{e,c}}s + \frac{1}{\rho}\alpha_s^{e,c}e_{\alpha\alpha} + d_s^{e,c}c - t\Big) * \delta s +$$

$$+ \rho\Big(d_c^{e,s}c + \frac{1}{\rho}\alpha_c^{e,s}e_{\alpha\alpha} + d_s^{e,s}s - \mu\Big) * \delta c - (\rho s + 1 * q_{i,i}^s - W_1) * \delta t -$$

$$- (\rho c + 1 * k_{i,i} - V_1) * \delta\mu + \frac{T_0}{\lambda} * \Big(q_i^s + \frac{\lambda}{T_0}t_{,i}\Big) * \delta q_i^s +$$

$$+ \frac{T_0}{L} * \Big(k_i + \frac{L}{T_0}\mu_{,i}\Big) * \delta k_i\Big\} dV + \int_{\Sigma_u} (\bar{u}_i - u_i) * \delta\sigma_i d\Sigma + \int_{\Sigma_\sigma} (\sigma_i - \bar{\sigma}_i) *$$

$$* \delta u_i d\Sigma + \int_{\Sigma_q} 1 * (q_n^s - \bar{q}_n) * \delta t d\Sigma + \int_{\Sigma_t} 1 * \Big(\frac{T_0}{\lambda_\Sigma}q_n^s + t_c - t\Big) * \delta q_n^s d\Sigma +$$

$$+ \int_{\Sigma_k} 1 * (k_n - \bar{k}_n) * \mu d\Sigma + \int_{\Sigma_\mu} 1 * \Big(\frac{T_0}{L_\Sigma}k_n + \mu_c - \mu\Big) * \delta k_n d\Sigma. \quad (17)$$

Необходимость очевидна, так как, положив Q решением задачи (2) — (13), с учетом (15) легко доказать, что (16) следует из (17).

Для доказательства достаточности предполагаем обратное, т. е. $Q \in \mathfrak{K}$ удовлетворяет (16). Тогда, используя леммы, установленные Гуртиным [11] и аналогичные фундаментальной лемме вариационного исчисления, можно показать, что Q с учетом (15) является решением смешанной краевой задачи (2) — (13).

Как частные случаи из этого вариационного принципа, можно получить и другие вариационные принципы [10] при соответствующих ограничениях на введенный функционал (14). Если предположить, что множество допустимых состояний $\mathfrak{K}$ удовлетворяет соотношениям (4) — (8), то функционал (14) при использовании теоремы о дивергенции можно привести к виду

$$\Psi\{w\} = \int_V \Big\{\frac{1}{2}\Big(K^{T,\mu} - \frac{2}{3}G\Big)u_{(i,i)} * u_{(i,i)} + Gu_{(i,j)} * u_{(i,j)} - \frac{1}{2}\rho\frac{C^{e,\mu}}{T_0}t * t -$$

$$- \frac{1}{2}\rho\frac{1}{d_c^{e,T}}\mu * \mu + \rho\frac{d_T^{e,c}}{d_c^{e,T}}t * \mu + (\alpha_T^{e,\mu}t + \alpha_\mu^{e,T}\mu) * u_{(i,i)} -$$

$$- \frac{1}{2} * \Big(\frac{\lambda}{T_0}t_{,i} * t_{,i} + \frac{L}{T_0}\mu_{,i} * \mu_{,i}\Big) + W_1 * t + V_1 * \mu - X_i * u_i +$$

$$+ \rho u(x,\tau)[u_i(x,0) - a_i] - \rho b_i u_i(x,\tau) + \frac{1}{2}\rho u_i * \dot{u}_i\Big\} dV + \int_{\Sigma_u} (\bar{u}_i - u_i) *$$

$$* \sigma_i d\Sigma - \int_{\Sigma_\sigma} \bar{\sigma}_i * u_i d\Sigma + \int_{\Sigma_t} \frac{\lambda}{T_0} * \Big(\frac{\lambda}{\lambda_\Sigma}t_{,n} + t - t_c\Big) * t_{,n} d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma_q} \frac{\lambda}{T_0} * \bar{q}_n * t d\Sigma + \int_{\Sigma_\mu} \frac{L}{T_0} * \Big(\frac{L}{L_\Sigma}\mu_{,n} + \mu - \mu_c\Big) * \mu_{,n} d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma_k} \frac{L}{T_0} * \bar{k}_n * \mu d\Sigma, \quad (18)$$

где $w = \{u_i, t, \mu\}$ — совокупность допустимых функций $u_i \in C^{2,2}$; $t, \mu \in C^{2,1}$.

Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что уравнения Эйлера — Лагранжа, вытекающие из стационарности функционала (18):

$$\delta\Psi\{w\} = 0, \quad \tau \geqslant 0 \tag{19}$$

с учетом (15) эквивалентны следующей системе уравнений [7, 9]: в области V при $\tau \geqslant 0$

$$Gu_{i,\alpha\alpha} + \left(K^{T,\mu} + \frac{1}{3}G\right)u_{\alpha,\alpha i} + \alpha_T^{e,\mu}t_{,i} + \alpha_\mu^{e,T}\mu_{,i} + X_i = \rho\ddot{u}_i, \tag{20}$$

$$\frac{\lambda}{\rho T_0}t_{,ii} - \frac{C^{e,\mu}}{T_0}\dot{t} + \frac{1}{\rho}\alpha_T^{e,\mu}\dot{u}_{(i,i)} + \frac{d_T^{e,c}}{d_c^{e,T}}\dot{\mu} = -W_0, \tag{21}$$

$$\frac{L}{\rho T_0}\mu_{,ii} - \frac{1}{d_c^{e,T}}\dot{\mu} + \frac{1}{\rho}\alpha_\mu^{e,T}\dot{u}_{(i,i)} + \frac{d_T^{e,c}}{d_c^{e,T}}\dot{t} = -V_0, \tag{22}$$

в области V при $\tau = 0$

$$u_i(x, 0) = a_i(x), \quad \dot{u}_i(x, 0) = b_i(x), \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{C^{e,\mu}}{T_0}t - \frac{1}{\rho}\alpha_T^{e,\mu}u_{(i,i)} - \frac{d_T^{e,c}}{d_c^{e,T}}\mu = s_0,\\ &\frac{1}{d_c^{e,T}}\mu - \frac{1}{\rho}\alpha_\mu^{e,T}u_{(i,i)} - \frac{d_T^{e,c}}{d_c^{e,T}}t = c_0, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

на поверхности Σ при $\tau \geqslant 0$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\left(K^{T,\mu} - \frac{2}{3}G\right)u_{(\alpha,\alpha)}\delta_{ij} + 2Gu_{(i,j)} + (\alpha_T^{e,\mu}t + \alpha_\mu^{e,T}\mu)\delta_{ij}\right]n_j = \bar{\sigma}_i, \quad x \in \Sigma_\sigma,\\ &u_i = \bar{u}_i, \quad x \in \Sigma_u, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$t_{,n} = \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda}(t_c - t), \quad x \in \Sigma_t, \quad -\frac{\lambda}{T_0}t_{,n} = \bar{q}_n, \quad x \in \Sigma_q, \tag{26}$$

$$\mu_{,n} = \frac{L_\Sigma}{L}(\mu_c - \mu), \quad x \in \Sigma_\mu, \quad -\frac{L}{T_0}\mu_{,n} = \bar{\dot{k}}_n, \quad x \in \Sigma_k. \tag{27}$$

Нахождение функций u_i, t, μ в области $V + \Sigma$ при $\tau \geqslant 0$ из уравнений (20)—(22), которые представляют собой сложную систему эллиптически-параболических уравнений, связано с известными математическими трудностями.

Построить методы интегрирования указанных выше взаимосвязанных уравнений с учетом термодиффузии, основанные на использовании функций Грина, позволяет, как известно [4], теорема о взаимности.

Теорема о взаимности. Рассмотрим две системы причин

$$\mathcal{L}^{(\alpha)} = \{\bar{u}_i^{(\alpha)}, a_i^{(\alpha)}, b_i^{(\alpha)}, X_i^{(\alpha)}, W_0^{(\alpha)}, V_0^{(\alpha)}, \bar{\sigma}_i^{(\alpha)}, t_c^{(\alpha)}, \mu_c^{(\alpha)}, \bar{q}_n^{(\alpha)}, \bar{k}_n^{(\alpha)}, s_0^{(\alpha)}, c_0^{(\alpha)}\} \tag{28}$$

и следствий

$$w^{(\alpha)} = \{u_i^{(\alpha)}, t^{(\alpha)}, \mu^{(\alpha)}\} \quad (\alpha = 1, 2). \tag{29}$$

Теорема 2. Если среда, физико-механические свойства которой описываются соотношениями (20) — (22), будет находиться под действием двух различных систем нагрузок $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$), то между соответствующими им конфигурациями $w^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) имеет место соотношение взаимности

$$\int_V (X_i^{(1)} * u_i^{(2)} - X_i^{(2)} * u_i^{(1)})\,dV - \int_V \rho\,[\dot{u}_i^{(1)}(x, \tau)\,a_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(2)}(x, \tau)\,a_i^{(1)}]\,dV -$$

$$-\int_V \rho\,[u_i^{(1)}(x, \tau)\,b_i^{(2)} - u_i^{(2)}(x, \tau)\,b_i^{(1)}]\,dV + \int_V (W_1^{(2)} * t^{(1)} - W_1^{(1)} * t^{(2)})\,dV +$$

$$+\int_V (V_1^{(2)} * \mu^{(1)} - V_1^{(1)} * \mu^{(2)})\,dV + \int_{\Sigma_u} (\bar{u}_i^{(2)} * \sigma_i^{1} - \bar{u}_i^{(1)} * \sigma_i^{(2)})\,d\Sigma +$$

$$+\int_{\Sigma_\sigma} (\bar{\sigma}_i^{(1)} * u_i^{(2)} - \bar{\sigma}_i^{(2)} * u_i^{(1)})\,d\Sigma + \int_{\Sigma_t} \frac{\lambda}{T_0} * (t_c^{(1)} * t_{,n}^{(2)} - t_c^{(2)} * t_{,n}^{(1)})\,d\Sigma +$$

$$+\int_{\Sigma_q} 1 * (\bar{q}_n^{(1)} * t^{(2)} - \bar{q}_n^{(2)} * t^{(1)})\,d\Sigma + \int_{\Sigma_\mu} \frac{L}{T_0} * (\mu_c^{(1)} * \mu_{,n}^{(2)} - \mu_c^{(2)} * \mu_{,n}^{(1)})\,d\Sigma +$$

$$+\int_{\Sigma_k} 1 * (\bar{k}_n^{(1)} * \mu^{(2)} - \bar{k}_n^{(2)} * \mu^{(1)})\,d\Sigma. \qquad (30)$$

Доказательство. Для вывода теоремы о взаимности используем тот факт, что если уравнения (20) — (22) удовлетворены при краевых условиях (23) — (27), то при любом выборе вариаций δu_i, δt и $\delta\mu$ выполняется условие (19) [2]. Если ввести обозначения

$$u_i = u_i^{(1)}, \quad t = t^{(1)}, \quad \mu = \mu^{(1)}, \quad \delta u_i = u_i^{(2)}, \quad \delta t = t^{(2)}, \quad \delta\mu = \mu^{(2)},$$

$$u_i = \bar{u}_i^{(1)}, \quad a_i = a_i^{(1)}, \quad b_i = b_i^{(1)}, \quad X_1 = X_i^{(1)}, \quad W_0 = W_0^{(1)}, \quad V_0 = V_0^{(1)}, \quad \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i^{(1)},$$

$$t_c = t_c^{(1)}, \quad \mu_c = \mu_c^{(1)}, \quad \bar{q}_n = \bar{q}_n^{(1)}, \quad \bar{k}_n = \bar{k}_n^{(1)}, \quad s_0 = s_0^{(1)}, \quad C_0 = C_0^{(1)},$$

то первую вариацию функционала (18) с учетом теоремы Гаусса — Остроградского можно представить в виде

$$\delta\Psi\{w^{(1)}\} = \int_V \Big\{\Big[-Gu_{i,\alpha\alpha}^{(2)} - \Big(K^{T,\mu} + \frac{1}{3}G\Big)u_{\alpha,\alpha i}^{(2)} - \alpha_T^{e,\mu} t_{,i}^{(2)} - \alpha_\mu^{e,T}\mu_{,i}^{(2)} + \ddot{u}^{(2)}\Big] *$$

$$* u_i^{(1)} - X_i^{(1)} * u_i^{(2)} + \Big[\frac{\lambda}{T_0} * t_{,ii}^{(2)} - \rho\frac{C^{e,\mu}}{T_0}t^{(2)} + \alpha_T^{e,\mu}u_{(i,i)}^{(2)} + \rho\frac{d_T^{e,c}}{d_c^{e,T}}\mu^{(2)}\Big] * t^{(1)} +$$

$$+ W_1^{(1)} * t^{(2)} + \Big[\frac{L}{T_0} * \mu_{,ii}^{(2)} - \rho\frac{1}{d_c^{e,T}}\mu^{(2)} + \alpha_\mu^{e,T}u_{(i,i)}^{(2)} + \rho\frac{d_T^{e,c}}{d_c^{e,T}}t^{(2)}\Big] * \mu^{(1)} +$$

$$+ V_1^{(1)} * \mu^{(2)} + \rho[\dot{u}^{(1)}(x,\tau)u_i^{(2)}(x,0) - a_i^{(1)}\dot{u}^{(2)}(x,\tau) + u_i^{(1)}(x,\tau)\dot{u}_i^{(2)}(x,0) -$$

$$- b_i^{(1)}u_i^{(1)}(x,\tau)]\Big\}dV + \int_\Sigma \Big[\Big(K^{T,\mu} - \frac{2}{3}G\Big)u_{(i,i)}^{(2)} + 2Gu_{(i,j)}^{(2)} + \alpha_T^{e,\mu}t^{(2)} + \alpha_\mu^{e,T}\mu^{(2)}\Big] *$$

$$* u_i^{(1)}d\Sigma + \int_{\Sigma_u} \bar{u}_i^{(1)} * \sigma_i^{(2)}d\Sigma - \int_{\Sigma_u} u_i^{(1)} * \sigma_i^{(2)}d\Sigma - \int_{\Sigma_u} \sigma_i^{(1)} * u_i^{(2)}d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma_\sigma} \bar{\sigma}_i^{(1)} * u_i^{(2)}d\Sigma + \int_{\Sigma_t} \frac{\lambda}{T_0} * \Big(\frac{\lambda}{\lambda_\Sigma}t_{,n}^{(2)} + t^{(2)}\Big) * t_{,n}^{(1)}d\Sigma - \int_{\Sigma_t} \frac{\lambda}{T_0} * t_c^{(1)} * t_{,n}^{(2)}d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma_q} \frac{\lambda}{T_0} * t^{(1)} * t_{,n}^{(2)}d\Sigma - \int_{\Sigma_q} \frac{\lambda}{T_0} * \bar{q}_n^{(1)} * t^{(2)}d\Sigma + \int_{\Sigma_\mu} \frac{L}{T_0} * \Big(\frac{L}{L_\Sigma}\mu_{,n}^{(2)} + \mu^{(2)}\Big) *$$

$$* \mu_{,n}^{(1)}d\Sigma - \int_{\Sigma_k} \frac{L}{T_0} * \mu^{(1)} * \mu_{,n}^{(2)}d\Sigma - \int_{\Sigma_k} \frac{L}{T_0} * \bar{k}_n^{(1)} * \mu^{(2)}d\Sigma.$$

Если предположить, что $u_i^{(2)}$, $t^{(2)}$ и $\mu^{(2)}$ являются решением смешанной динамической задачи термодиффузии в деформируемом твердом теле при действии нагрузок $\mathcal{L}^{(2)}$, то из условия (19) следует соотношение (30).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айнола Л. Я.* Вариационный принцип динамически линейной теории упругости.— Докл. АН СССР. Сер. физ.-мат., 1967, 172, № 2, с. 306—308.

2. *Айнола Л. Я.* К теореме взаимности для динамических задач теории упругости.—Прикл. математика и механика, 1967, вып. 2, с. 176—177.
3. *Болотин В. В.* О вариационных принципах теории упругой устойчивости.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., 1970, с. 83—88.
4. *Григолюк Э. И., Попович В. Е.* Теорема Кастилиано и метод единичной нагрузки для задачи термоупругости сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1974, 219, № 2, с. 305—307.
5. *Підстригач Я. С.* Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі.— Допов. АН УРСР, 1961, № 2, с. 169—172.
6. *Підстригач Я. С., Павлина В. С.* Загальні співвідношення термодинаміки твердих розчинів.— Укр. фіз. журн., 1961, 6, № 5, с. 655—663.
7. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С., Дасюк Я. И.* О рассеянии механической энергии в деформируемом твердом теле при термодиффузионных процессах.— Пробл. прочности, 1973, № 1, с. 3—8.
8. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Вариационная форма уравнений теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле.— Прикл. математика и механика, 1969, 33, № 4, с. 774—776.
9. *Савин Г. Н., Подстригач Я. С.* О влиянии диффузионных процессов на напряженное состояние деформируемых тел.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., 1970, с. 391—403.
10. *Швец Р. Н., Дасюк Я. И.* О вариационных теоремах термодиффузии деформируемых твердых тел.— Мат. физика, 1977, вып. 22, с. 102—108.
11. *Gurtin M. E.* Variational principles for linear elastodynamics.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1964, 20, N 3, p. 34—49.
12. *Ieşan D.* Principes variationnels dans la thermoélasticité couplée.— An. sti. Univ. Iaşi. Sec. I.B, 1966, 12, p. 439—456.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
7.II 1977 г.

УДК 539.3

Р. Н. Швец, С. В. Грицай

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТАХ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ*

Применение операторного метода [6] в динамике изотропных плит можно найти в работах [1, 7]. В работе [5] этот метод был распространен на задачу о статическом равновесии трансверсально-изотропного слоя. Успешное применение операторный метод нашел в задачах теплопроводности [9] и в связанных задачах термоупругости [13]. Приведение пространственной задачи теории упругости к двумерной можно выполнить различными методами [2, 4, 6, 10]. В настоящей работе операторным методом трехмерная динамическая задача для бесконечного трансверсально-изотропного слоя сведена к двумерной проблеме. Применяемый метод в сочетании с методом усреднения дал возможность записать точные уравнения бесконечно высокого порядка относительно усредненных по толщине перемещений слоя, находящегося под антисимметричной нагрузкой, и получить приближенные уравнения изгибных движений плит, известных в литературе. Показано при этом, что анизотропия значительно влияет на величину фазовой скорости.

Основные уравнения. Рассмотрим трансверсально-изотропный слой постоянной толщины $2h$, который на поверхностях $z = \pm h$ загружен произвольными силами, т. е.

$$\begin{aligned} &\text{при } z = h \quad \sigma_{zx} = \sigma_1^+, \quad \sigma_{yz} = \sigma_2^+, \quad \sigma_{zz} = \sigma_3^+, \\ &\text{при } z = -h \quad \sigma_{zx} = \sigma_1^-, \quad \sigma_{yz} = \sigma_2^-, \quad \sigma_{zz} = \sigma_3^-. \end{aligned} \tag{1}$$

* Эти результаты были доложены на VII научной конференции по применению ЭВМ в механике деформируемого твердого тела в Ташкенте 30 сентября 1975 г.