4. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.I 1977 г.

УДК 517.63

О. В. Побережный, Я. Д. Пяныло

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

Многие задачи нестационарной термоупругости, в том числе для тел с трещинами, легко разрешимы в трансформантах Лапласа. Проблема приближенного обращения преобразования Лапласа, и в особенности численного его обращения, возникла из потребности довести решение до числа в том случае, когда существующие таблицы функций и их изображений не дают возможности по изображению найти оригинал или требуют очень больших вычислений.

Задачу численного обращения преобразования Лапласа можно решить методами [2], основанными на разложении оригинала в ряды по ортогональным многочленам. Тогда искомая функция $f(t)$ представляется рядом

$$f(t) = h(t) {\sum_{n=0}^{\infty}}' a_n p_n (e^{-\sigma t}), \tag{1}$$

где $p_n(e^{-\sigma t})$ — ортонормированные многочлены на промежутке $[0, 1]$, которые записываются в виде разложения

$$p_n(e^{-\sigma t}) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^n e^{-j\sigma t}, \tag{2}$$

$$a_n^{\cdot} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^n \sigma F(\sigma j); \tag{3}$$

$F(p)$ — изображение Лапласа функции $f(t)$; $h(t)$ — весовая функция ортогональных многочленов; $\sigma > 0$ — свободный параметр.

Таким образом, задача численного обращения преобразования Лапласа сведена к вычислению коэффициентов $a_n^{\cdot}$ по формуле (3). При этом мы встречаемся с проблемой умножения очень больших чисел α_j^n на очень малые $\sigma F(\sigma j)$. Как известно [5], в таких операциях теряется точность вычисления. Для устранения этого недостатка выведем асимптотическую формулу для a_n, устанавливаемую следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $f(t)$, $t \in [0, \infty]$ — непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойствами

$$f(t) \cong \begin{cases} C + Dt^{\gamma} e^{-ut^{\nu}}, & t \to 0, \\ A + Bt^{\delta} e^{-vt}, & t \to \infty, \end{cases} \tag{4}$$

где A, C, γ, δ, ν — произвольные числа; D, $B \neq 0$; u, $v \geqslant 0$. Тогда при достаточно больших n имеет место асимптотическая формула для a_n при разложении оригинала по смещенным многочленам Якоби

$$p_n(e^{-\sigma t}) = \frac{1}{\sqrt{r_n}} P_n^{(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t}), \quad r_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\, m\Gamma(m-n)},$$

$$a_n \cong \frac{2}{\sqrt{\pi n r_n}} \left\{(-1)^{n+1} A \sin \pi\beta\, \Gamma\left(-\beta - \frac{1}{2}\right) m^{\beta + \frac{1}{2}} + \right.$$

$$+(-1)^{n+1}B\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\delta}\Gamma(k)\,m^{-k}\ln^{\delta}m\left[\sin\left(\pi\left(\beta-\frac{v}{\sigma}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi\delta\cos\left(\pi\left(\beta-\frac{v}{\sigma}\right)\right)}{2\ln m}-\frac{\delta\sin\left(\pi\left(\beta-\frac{v}{\sigma}\right)\right)}{\ln m}\,\psi(k)\right]+$$

$$\left.+C\frac{\Gamma(i)\sin\pi\alpha}{m^{i}}+D\sin(\pi(\alpha-\gamma))\,\Gamma(2\gamma+i)\,\sigma^{-\gamma}m^{-(2\gamma+i)}\right\}, \tag{5}$$

$$\beta<\frac{2v}{\sigma}-\frac{1}{2},\quad A=0,\quad \alpha<\min\left\{\frac{3}{2},\ 2\gamma+\frac{3}{2}\right\},$$

где обозначено: $m=2n+\alpha+\beta+1$; $k=\frac{2v}{\sigma}-\beta-\frac{1}{2}$; $i=\frac{3}{2}-\alpha$; $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$; $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Ввиду громоздкости доказательство теоремы не приводим. Оно аналогично доказательству в работе [5]. Такие же асимптотические формулы для a_n имеют место при разложении оригинала по смещенным многочленам Гегенбауэра, Чебышева I и II рода, Лежандра. Отметим, что когда в (4) $u=0$, то γ должно удовлетворять неравенству $\gamma>-1$. Это необходимо для существования изображения Лапласа.

Теорема 2. Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то для достаточно больших значений $n>N$ погрешность между точным значением $f(t)$ и приближенным $f_N(t)$, полученным путем разложения оригинала по присоединенным полиномам Якоби, устанавливается следующим неравенством:

$$|\Delta f(t)|=|f(t)-f_N(t)|\leqslant\mu(\sigma,t)\left\{\Delta_1 N^{-(k-1)}\ln^{\delta}2N\ \times\right.$$

$$\times\left[1+\frac{\pi}{2\ln 2N}\left|\delta\operatorname{ctg}\left(\pi\left(\beta-\frac{v}{\sigma}\right)\right)\right|+|\delta|\ln^{-1}2N\,\psi(k)\right]+$$

$$\left.+\Delta_2 N^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}+\Delta_3 N^{-\left(2\gamma-\alpha+\frac{1}{2}\right)}\right\}, \tag{6}$$

где

$$\Delta_1=\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\delta}\Gamma(k)\,2^{-k}\,\frac{\left|B\sin\left(\pi\left(\beta-\frac{v}{\sigma}\right)\right)\right|}{k-1};$$

$$\Delta_2=\Gamma(i)\,2^{-i}\,\frac{|C\sin\pi\alpha|}{\frac{1}{2}-\alpha};$$

$$\Delta_3=\sigma^{-\gamma}\,\Gamma(2\gamma+i)\,2^{-(2\gamma+i)}\,\frac{|D\sin(\pi(\alpha-\gamma))|}{2\gamma-\alpha+\frac{1}{2}};$$

$$\mu(\sigma,t)=\frac{4}{\pi}\exp\left[-\frac{\sigma t}{2}\left(\beta+\frac{3}{2}\right)\right][1-\exp(-\sigma t)]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}; \tag{7}$$

$$\beta<\frac{2v}{\sigma}-\frac{3}{2},\quad \alpha<\min\left\{\frac{1}{2},\ 2\gamma+\frac{1}{2}\right\}.$$

Доказательство. Разложение оригинала $f(t)$ по присоединенным многочленам Якоби имеет вид

$$f(t)=h(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}P_n^{(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t}), \tag{8}$$

где

$$h(t) = \exp[-\sigma t(1+\beta)][1-\exp(-\sigma t)]^{\alpha}. \tag{9}$$

Предположим, что при $n \geqslant N+1$ имеет место асимптотическая формула (5) и $r_n \cong (2n)^{-1}$. Учитывая неравенство

$$|P_n^{(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t})| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left[\frac{\sigma t}{2}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\right][1-\exp(-\sigma t)]^{-\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)},$$

асимптотическую формулу (5) и упомянутые выше предположения, получаем

$$|\Delta f(t)| \leqslant \mu(\sigma, t)\left\{\Delta_1(k-1)\left[\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-k}\ln^{\delta} 2n\left(1+\frac{\pi}{2}\left|\delta\operatorname{ctg}\left(\pi\left(\beta-\frac{v}{\sigma}\right)\right)\right|\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\ln^{-1}2n+|\delta|\ln^{-1}2n\,\psi(k)\right)\right]+\Delta_2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-i}+$$
$$\left.+\Delta_3\left(2\gamma-\alpha+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-(2\gamma+i)}\right\}. \tag{10}$$

Здесь использовано асимптотическое равенство $n+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1) \cong \cong n$ при $n \geqslant N+1$. Ряды в (10) сходятся при условиях, налагаемых на параметры α, β, v, σ, γ в теореме 2. Используя интегральный признак сходимости рядов Маклорена — Коши [4], из неравенства (10) приходим к (6), что и требовалось доказать.

Оценки погрешностей, аналогичные (6), можно получить для разложений функций по другим присоединенным ортогональным многочленам. Для этого достаточно в (6) положить такие значения параметров α и β, которые соответствуют многочленам Гегенбауэра, Чебышева I и II рода, Лежандра.

Обозначая через $\Phi(\sigma, N, t)$ правую часть неравенства (6) и решая неравенство

$$\Phi(\sigma, N, t) \leqslant \varepsilon, \tag{11}$$

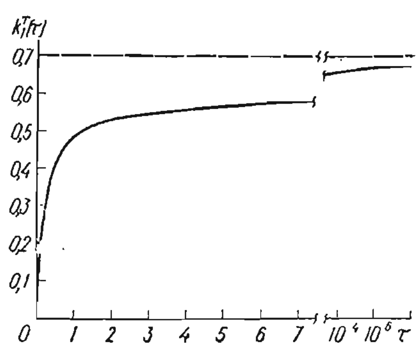
находим для каждого фиксированного t такие значения σ и N, при которых приближенное значение $f_N(t)$ отличается от точного $f(t)$ не больше наперед заданного числа ε.

Пример. В работе [3] найдено в трансформантах Лапласа — Карсона решение нестационарной задачи термоупругости для бесконечной пластинки с прямолинейной трещиной длины $2l$, на берегах которой в начальный момент времени задана температура T_0, когда между пластинкой и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Коэффициент интенсивности напряжений, записанный в трансформантах Лапласа — Карсона, имеет вид

$$\bar{k}_1(p) = dQ_0\left[\frac{K_0(fls)}{K_1(fls)} I_1(fls) + I_0(fls)\right] K_0(ls). \tag{12}$$

Здесь $K_j(x)$ и $I_j(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента, а остальные обозначения такие, как в работе [3].

Используя теоремы предельных соотношений преобразования Лапласа [1], находим характер поведения функции $k_1(\tau)$ по значению $\bar{k}_1(p)$ при $\tau \to 0$ и при $\tau \to \infty$, откуда определяем параметры A,



B, C, D, γ, δ, u, v, ν. По этим параметрам, используя результаты теорем 1 и 2, устанавливаем неравенство (11), которое в случае разложения оригинала по присоединенным полиномам Лежандра примет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\exp(\sigma\tau/4)}{\sqrt{\sigma}[1-\exp(-\sigma\tau)]^{1/4}}N^{-\frac{3}{2}}\leqslant\varepsilon.$$

На рисунке с точностью до $\varepsilon=0{,}01$ построен график зависимости $k_1^T(\tau)=-\frac{\lambda^*+2\mu}{2\mu\beta_t T_0 b\sqrt{l}}k_1(\tau)$ как функции безразмерного времени $\tau=ct/l^2b^2$, когда пластинка теплоизолирована с боковых поверхностей ($\varkappa=0$) и температура T_0 задана на всей длине трещины ($f=1$). Как видно из рисунка, коэффициент интенсивности напряжений достаточно быстро увеличивается в начальные моменты времени $0<\tau\leqslant 1$, а затем очень медленно приближается к значению, соответствующему стационарному случаю (этот случай отмечен на рисунке штриховой линией).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М., «Высш. школа», 1975. 407 с.
2. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., «Наука», 1974. 223 с.
3. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Нестационарная задача термоупругости для пластинки с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей.— ФХММ, 1974, № 4, с. 73—78.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1970. 800 с.
5. *Цирулис Т. Т., Белов М. А.* Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного обращения преобразования Лапласа.— Учен. зап. Латв. ун-та, 1973, № 292, с. 139—154.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.II 1977 г.

УДК 539.377

М. Г. Кривцун

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ РАЗРЕЗОВ

Рассмотрим упругую изотропную плоскость с периодической системой трещин, расположенных вдоль неограниченного числа гладких дуг L_k, комплексные координаты точек которых выражаются через точки $\tau^{(0)}$ дуги L_0 соотношением

$$\tau^{(k)}=kd+\tau^{(0)},\tag{1}$$

где d — действительная постоянная (период задачи). Определим напряженное состояние такой плоскости, когда она при стационарной температуре $T(x, y)$ нагружена внешними усилиями. Предполагаем, что берега трещин в процессе деформации не контактируют.

Задача теплопроводности. Пусть на контуре $L=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}L_k$ задано одно из условий [3]

$$T^{\pm}(\tau)=f^{\pm}(\tau),\tag{2}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^{\pm}=\mp q^{\pm}(\tau),\tag{3}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^{\pm}-h(\tau)(T^{+}-T^{-})=q_a(\tau).\tag{4}$$