

На рис. 2 приведена зависимость от параметра a величины $\tilde{k}_1 = \frac{k_1}{c \sqrt{\pi l}}$, подсчитанной по формуле (16). Из графика видно, что с увеличением области контакта коэффициент интенсивности напряжений уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С. Метод дисторсии в теории термоупругости тел с трещинами.— ФХММ, 1975, 11, № 3, с. 9—20.
2. Кит Г. С., Дорош Н. А. Термоупругое состояние плоскости с двумя равными прямолинейными трещинами.— Концентрация напряжений, 1971, вып. 3, с. 61—67.
3. Кит Г. С., Подстригац Я. С. Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением.— ФХММ, 1966, 2, № 3, с. 247—252.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968. 511 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
17.III 1977 г.

УДК 539.3

Е. М. Федюк

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ПОПЕРЕЧНЫХ ТРЕЩИН

Рассмотрим отнесенную к декартовой прямоугольной системе координат xOy бесконечную пологую цилиндрическую оболочку с системой N поперечных прямолинейных в плане трещин (разрезов) длиной $2l_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), расположенных вдоль координатных линий $x = \text{const}$. Предположим, что берега трещин загружены самоуравновешивающими усилиями и моментами и в процессе деформации не контактируют. На каждой трещине введем локальную систему координат $x_k O_k y_k$, начало которой поместим в центре трещины, а ось $O_k x_k$ направим по линии трещины. Центры трещин в базисной системе координат xOy имеют координаты (x_k^0, y_k^0) , а оси $O_k x_k$ образуют с осью Ox углы $\beta_k = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Используя предложенный в работе [4] метод решения задач теории тонких оболочек с трещинами, для полой цилиндрической оболочки [1] с поперечной трещиной $|x_k| \leq l_k, y_k = 0$ получаем систему дифференциальных уравнений относительно функции напряжений φ_k и функции прогибов w_k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_0} \nabla^2 \nabla^2 \varphi_k - \frac{1}{R} \nabla_2^2 w_k &= -F_1^0(x_k, y_k), \\ D_1 \nabla^2 \nabla^2 w_k + \frac{1}{R} \nabla_2^2 \varphi_k &= -D_1 F_2^0(x_k, y_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1^0 &= \nabla_1^2 \varepsilon_{11}^0 - \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{12}^0; \quad F_2^0 = (\nabla_2^2 + \nu \nabla_1^2) \kappa_{11}^0 + 2(1 - \nu) \nabla_1 \nabla_2 \kappa_{12}^0; \\ \nabla^2 &= \nabla_1^2 + \nabla_2^2; \quad \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y_k}; \end{aligned}$$

$D_0 = 2Eh$; $D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)}$; E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; R и $2h$ — радиус срединной поверхности и толщина оболочки;

$\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $\varkappa_{ij}^{(0)}$ — компоненты тензора дисторсии, характеризующие разрывы перемещений и углов поворота на линии трещины:

$$\varepsilon_{11}^0(x_k, y_k) = \varepsilon_{1k}(x_k) \delta(y_k), \quad \varepsilon_{12}^0(x_k, y_k) = \varepsilon_{3k}(x_k) \delta(y_k),$$

$$\varkappa_{11}^0(x_k, y_k) = \varkappa_{1k}(x_k) \delta(y_k) + \int_{l_k}^{x_k} \varkappa_{3k}(x) dx \delta'(y_k),$$

$$\varkappa_{12}^0(x_k, y_k) = \varkappa_{3k}(x_k) \delta(y_k) \text{ при } |x_k| < l_k; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11}^0(x_k, y_k) = \varepsilon_{12}^0(x_k, y_k) = \varkappa_{11}^0(x_k, y_k) = \varkappa_{12}^0(x_k, y_k) = 0 \text{ при } |x_k| \geq l_k,$$

где

$$\varepsilon_{1k} = v_k^+ - v_k^-, \quad \varepsilon_{3k} = u_k^+ - u_k^-, \quad \varkappa_{1k} = -(\theta_{2k}^+ - \theta_{2k}^-),$$

$$\varkappa_{3k} = -(\theta_{1k}^+ - \theta_{1k}^-), \quad \theta_{1k} = \nabla_1 \omega_k, \quad \theta_{2k} = \nabla_2 \omega_k,$$

$\delta'(y) = \frac{d}{dy} \delta(y)$, $\delta(y)$ — функция Дирака.

Систему уравнений (1) приведем к разрешающему уравнению для определения функции прогибов ω_k :

$$(\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + \gamma^4 \nabla^4) \omega_k = R \gamma^4 \nabla_2^2 F_1^0 - \nabla^2 \nabla^2 F_2^0 \quad (3)$$

и соотношению для определения функции напряжений φ_k :

$$\nabla_2^2 \varphi_k = -D_1 R (\nabla^2 \nabla^2 \omega_k + F_2^0), \quad (4)$$

где $\gamma^4 = \frac{D_0}{D_1 R^2}$.

Подставляя выражения (2) в уравнение (3) и соотношение (4), получаем разрешающие функции ω_k и φ_k :

$$g_k^i(x_k, y_k) = \frac{a_i}{4\pi} \int_{-l_k}^{l_k} \{ \varepsilon_{1k}(\xi) \Phi_i(x_k - \xi, y_k) + \varepsilon_{3k}(\xi) \Phi_{i+2}(x_k - \xi, y_k) + \\ + R c [\varkappa_{1k}(\xi) F_i(x_k - \xi, y_k) + \varkappa_{3k}(\xi) F_{i+2}(x_k - \xi, y_k)] \} d\xi \quad (i = 1, 2), \quad (5)$$

где

$$\Phi_1 = -\omega_1 - \omega_3; \quad \Phi_2 = \omega_2 - \omega_4; \quad \Phi_3 = -\omega_5; \quad \Phi_4 = -\omega_6;$$

$$F_1 = (1 + \nu) \omega_2 + (1 - \nu) \omega_4; \quad F_2 = (1 + \nu) \omega_1 - (1 - \nu) \omega_3;$$

$$F_3 = 2(1 - \nu) \omega_6 - \int_{x_k}^{\xi} \nabla_2 F_1 d\xi; \quad F_4 = -2(1 - \nu) \omega_5 - \int_{x_k}^{\xi} \nabla_2 F_2 d\xi;$$

$$\omega_1(r) = A_1 \ker \beta r + A_2 \operatorname{kei} \beta r; \quad \omega_2(r) = A_2 \ker \beta r - A_1 \operatorname{kei} \beta r;$$

$$\omega_3(r) = \psi_1(r) \frac{y_k}{r}; \quad \omega_4(r) = \psi_2(r) \frac{y_k}{r}; \quad \omega_5(r) = \psi_1(r) \frac{\tau}{r};$$

$$\omega_6(r) = \psi_2(r) \frac{\tau}{r}; \quad \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_2 \ker' \beta r - \alpha_1 \operatorname{kei}' \beta r);$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \ker' \beta r + \alpha_2 \operatorname{kei}' \beta r); \quad \alpha_1 = B_1 + B_2; \quad \alpha_2 = B_2 - B_1;$$

$$A_1(y_k) = \sin my_k \operatorname{sh} my_k; \quad A_2(y_k) = \cos my_k \operatorname{ch} my_k;$$

$$B_1(y_k) = \sin my_k \operatorname{ch} my_k; \quad B_2(y_k) = \cos my_k \operatorname{sh} my_k;$$

$$r^2 = \tau^2 + y_k^2; \quad \tau = x_k - \xi; \quad g_k^1 = \omega_k; \quad g_k^2 = \varphi_k;$$

$$a_1 = \frac{1}{Rc}; \quad a_2 = D_0; \quad Rc = \frac{h}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}; \quad m = \frac{\beta}{\sqrt{2}};$$

$$\beta = \frac{\gamma}{2}; \quad \ker' x = \frac{d}{dx} \ker x; \quad \operatorname{kei}' x = \frac{d}{dx} \operatorname{kei} x;$$

$\ker x$, $\operatorname{kei} x$ — функции Томсона.

Используя полученные соотношения для разрешающих функций и соответствующие формулы для определения усилий и моментов [4], получаем выражения для затухающих на бесконечности усилий и моментов в произвольной точке оболочки, обусловленных полем (2). В частности, на линии n -й трещины они имеют вид

$$G'_{nk} = \frac{A_i}{4\pi} \int_{-l_k}^{l_k} [\Psi_{1k}(\xi) K'_{nk}(\xi, x_n) + \Psi_{2k}(\xi) L'_{nk}(\xi, x_n) + \Psi_{3k}(\xi) P'_{nk}(\xi, x_n) + \Psi_{4k}(\xi) R'_{nk}(\xi, x_n)] d\xi, \quad |x_n| \leq l_n \quad (6)$$

$(n = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, 3, 4).$

Здесь

$$\begin{aligned} G'_{nk} &= N_{nk}; \quad G^2_{nk} = S_{nk}; \quad G^3_{nk} = M_{nk}; \quad G^4_{nk} = \int Q_{nk}^* dx_n + c_{nk}; \\ \Psi_{1k} &= \frac{d}{d\xi} \varepsilon_{1k}(\xi); \quad \Psi_{2k} = \frac{d}{d\xi} \varepsilon_{3k}(\xi); \quad \Psi_{3k} = Rc \frac{d}{d\xi} \varkappa_{1k}(\xi); \\ \Psi_{4k} &= Rc \frac{d}{d\xi} \varkappa_{3k}(\xi); \quad K^1_{nk} = \varphi_3 - f_4; \quad L^1_{nk} = f_2 - \varphi_4; \\ P^1_{nk} &= (1 + \nu) \varphi_2 - (1 - \nu) f_3; \quad R^1_{nk} = 2\varphi_1 + (3 - \nu) \varphi_5 + (1 - \nu) f_1; \\ K^2_{nk} &= -L^1_{nk}; \quad L^2_{nk} = -\varphi_3 - f_4; \quad P^2_{nk} = 2\varphi_1 + (1 + \nu) \varphi_5 - (1 - \nu) f_1; \\ R^2_{nk} &= -(1 + \nu) \varphi_2 - (1 - \nu) f_3 - 2 \int_{x_n}^{\xi} \partial^2 \omega_1(\rho) d\xi, \quad K^3_{nk} = P^1_{nk}, \\ L^3_{nk} &= -P^2_{nk}; \quad P^3_{nk} = (3 - 2\nu - \nu^2) \varphi_3 + (1 - \nu)^2 f_4 + \\ &+ 4\beta^2 \int_{x_n}^{\xi} [\omega_3(\rho) - \omega_1(\rho)] d\xi; \quad R^3_{nk} = (5 - 2\nu + \nu^2) \varphi_4 - (1 - \nu)^2 f_2 + \\ &+ 8\beta^2 \int_{x_n}^{\xi} (\varphi_1 + \varphi_6) d\xi d\xi; \quad K^4_{nk} = -\gamma_1 R^1_{nk}; \quad L^4_{nk} = \gamma_1 R^2_{nk}; \\ P^4_{nk} &= -\gamma_1 R^3_{nk}; \quad R^4_{nk} = \gamma_1 \left[-(3 - 2\nu - \nu^2) \varphi_3 + (1 - \nu)^2 f_4 - \right. \\ &\left. - 4\beta^2 \int_{x_n}^{\xi} [(1 + 2\nu) \omega_1(\rho) + (1 - 2\nu) \omega_3(\rho)] d\xi - 8\beta^2 \int_{x_n}^{\xi} \int_{x_n}^{\xi} \partial^2 \omega_1(\rho) d\xi d\xi d\xi \right]. \end{aligned}$$

Функции φ_i и f_i имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho) &= \psi_3(\rho) \frac{\theta}{\rho}; \quad \varphi_2(\rho) = \varphi_3(\rho) \frac{t}{\rho}; \quad \varphi_3(\rho) = \varphi_4(\rho) \frac{t}{\rho}; \\ \varphi_4(\rho) &= m [\alpha_2(\theta) \ker \beta\rho - \alpha_1(\theta) \operatorname{kei} \beta\rho]; \quad \varphi_5(\rho) = m [\alpha_1(\theta) \ker \beta\rho + \\ &+ \alpha_2(\theta) \operatorname{kei} \beta\rho]; \quad f_1(\rho) = \frac{1}{\beta\sqrt{2}} [\alpha_2(\theta) \Phi_1(\rho) - \alpha_1(\theta) \Phi_2(\rho)]; \\ f_2(\rho) &= \frac{1}{\beta\sqrt{2}} [\alpha_1(\theta) \Phi_1(\rho) + \alpha_2(\theta) \Phi_2(\rho)]; \quad f_3(\rho) = \frac{1}{\beta\sqrt{2}} [\alpha_2(\theta) \Phi_3(\rho) - \\ &- \alpha_1(\theta) \Phi_4(\rho)]; \quad f_4(\rho) = \frac{1}{\beta\sqrt{2}} [\alpha_1(\theta) \Phi_3(\rho) + \alpha_2(\theta) \Phi_4(\rho)]; \\ \psi_3 &= \beta [A_1(\theta) \ker' \beta\rho + A_2(\theta) \operatorname{kei}' \beta\rho]; \quad \psi_4 = \beta [A_2(\theta) \ker' \beta\rho - \\ &- A_1(\theta) \operatorname{kei}' \beta\rho]; \quad \Phi_1 = \partial_2^2 \ker \beta\rho; \quad \Phi_2 = \partial_2^2 \operatorname{kei} \beta\rho; \\ \Phi_3 &= \partial_1 \partial_2 \ker \beta\rho; \quad \Phi_4 = \partial_1 \partial_2 \operatorname{kei} \beta\rho; \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}; \end{aligned}$$

$$\rho^2 = t^2 + \theta^2; \quad t = \eta - \xi; \quad \eta = (y_n^0 - y_k^0) \gamma_1 + x_n^0 \cos(\beta_n - \beta_k);$$

$$\theta = (x_k^0 - x_n^0) \gamma_1; \quad \gamma_1 = \sin \beta_k; \quad A_1 = A_2 = D_0; \quad A_3 = A_4 = D_0 R c.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи суммарные усилия и моменты на линии n -й трещины $O_n x_n$, вызванные всеми разрывами перемещений и углов поворота на N разрезах $|x_k| \leq l_k, y_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$), получим путем суперпозиции усилий и моментов для изолированных разрезов:

$$G_n^i = \sum_{k=1}^N G_{nk}^i, \quad |x_n| \leq l_n \quad (n = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, 3, 4), \quad (7)$$

где $G_n^1 = N_1, G_n^2 = S, G_n^3 = \int Q_1^* dx_n + c_n$ — соответственно нормальное, касательное и обобщенное перерезывающее усилия; $G_n^4 = M_1$ — изгибающий момент.

Приравнявая полученные выражения (7) для усилий и моментов к заданным усилиям и моментам на берегах разрезов, получаем систему $4N$ сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций Ψ_{ik} :

$$\sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} [\Psi_{1k}(\xi) K_{nk}^1(\xi, x_n) + \Psi_{2k}(\xi) L_{nk}^1(\xi, x_n) + \Psi_{3k}(\xi) P_{nk}^1(\xi, x_n) + \Psi_{4k}(\xi) R_{nk}^1(\xi, x_n)] d\xi = \frac{4\pi}{A_i} T_n^i(x_n), \quad (8)$$

$$|x_n| \leq l_n \quad (n = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, 3, 4),$$

где T_n^i — заданные на берегах разрезов усилия и моменты. Ядра системы, уравнений (8) регулярны, за исключением случая $n = k$, когда ядра $K_{nk}^1, L_{nk}^2, P_{nk}^3$ и R_{nk}^4 имеют сингулярности типа Коши.

В случае системы N коллинеарных поперечных трещин ($x_k^0 = x_n^0$) ядра $L_{nk}^1 = R_{nk}^1 = P_{nk}^2 = R_{nk}^3 = 0$ и система интегральных уравнений (8) распадается на две независимые системы интегральных уравнений, соответствующие симметричной и антисимметричной относительно линии расположения трещин приложенных к оболочке нагрузок. Так, для оболочки с двумя трещинами одинаковой длины $2l$ при симметричной нагрузке система интегральных уравнений принимает вид

$$\sum_{k=1,3}^i \int_{-l}^l \Psi_k(\xi) K_{ik}(\xi, x) d\xi = f_i(x), \quad |x| \leq l \quad (i = 1, 3). \quad (9)$$

Здесь

$$\Psi_1 = \frac{d}{d\xi} \varepsilon_1(\xi); \quad \Psi_3 = R c \frac{d}{d\xi} \varkappa_1(\xi); \quad K_{ii} = \sum_{j=1}^2 \left[-\frac{a_j}{z_j} + K_{ii}^0(z_j) \right];$$

$$K_{13} = K_{31} = \sum_{j=1}^2 K_{13}^0(z_j); \quad K_{11}^0(z) = (\beta |z| \operatorname{ker}' \beta |z| + 1) \frac{1}{z};$$

$$K_{13}^0(z) = (1 + \nu) \beta \frac{|z|}{z} \operatorname{kei}' \beta |z|; \quad K_{33}^0(z) = a_3 K_{11}^0(z) -$$

$$- 4\beta^2 \int_x^\xi \operatorname{kei} \beta |z| d\xi; \quad f_1 = \frac{4\pi}{D_0} N_1(x, 0); \quad f_3 = \frac{4\pi}{D_0 R c} M_1(x, 0);$$

$$z_1 = x - \xi; \quad z_2 = -(x + \xi + 2d); \quad a_1 = 1; \quad a_3 = 3 - 2\nu - \nu^2;$$

$N_1(x), M_1(x)$ — соответственно нормальное усилие и изгибающий момент на берегах трещин; $2d$ — расстояние между центрами трещин; $K_{11}^0, K_{13}^0, K_{33}^0$ — непрерывные функции для всего множества действительных значений x, ξ .

Решая систему интегральных уравнений (9) методом [2] в случае, когда трещины загружены равномерно распределенными усилиями $N_1(x, 0) = -N_1^0$ и изгибающими моментами $M_1(x, 0) = -M_1^0$, для определения коэффициентов интенсивности усилий K_1 и моментов K_3 [3] получаем выражения в окрестности внешних

$$K_i^+ = k_{in} \alpha_i \sum_{m=1}^{n-1} A_m^i \quad (i = 1, 3) \quad (10)$$

и внутренних

$$K_i^- = k_{in} \alpha_i \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m+1} A_m^i \quad (i = 1, 3) \quad (11)$$

вершин трещин. Здесь

$$k_{1n} = N_1^0 \sqrt{l}; \quad k_{3n} = Rc N_1^0 \sqrt{l}; \quad A_m^i = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \varphi_{i\nu} \cos m\theta_\nu;$$

$$\varphi_{i\nu} = \varphi_i(x_\nu); \quad \varphi_i(x) = -\frac{D_0}{2N_1^0} \sqrt{1-x^2} \Psi_i(x); \quad \theta_\nu = \frac{2\nu-1}{2n} \pi.$$

Функции $\varphi_{i\nu}$ находим, решая систему алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_{m\nu} \varphi_{1\nu} + \sum_{\nu=1}^n \beta_{m\nu} \varphi_{3\nu} = 1, \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

$$\sum_{\nu=1}^n \beta_{m\nu} \varphi_{1\nu} + \sum_{\nu=1}^n \gamma_{m\nu} \varphi_{3\nu} = k$$

где

$$\alpha_{m\nu} = \frac{1}{2n} [\psi_{m\nu} + K_{11}^0(\theta_m, \theta_\nu)]; \quad \beta_{m\nu} = \frac{1}{2n} K_{13}^0(\theta_m, \theta_\nu);$$

$$\gamma_{m\nu} = \frac{1}{2n} [a_3 \psi_{m\nu} + K_{33}^0(\theta_m, \theta_\nu)]; \quad \psi_{m\nu} = \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{c_{m\nu}}{2};$$

$$c_{m\nu} = \begin{cases} \theta_m - \theta_\nu, & |m - \nu| - \text{нечетное,} \\ \theta_m + \theta_\nu, & |m - \nu| - \text{четное,} \end{cases} \quad k = \frac{M_1^0}{Rc N_1^0}.$$

Условие отсутствия контакта берегов трещин под действием данной нагрузки получаем в виде

$$\frac{D_0}{2N_1^0} \Delta^\pm(x_\nu) = \sum_{m=1}^{n-1} (A_m^1 \pm \sqrt{3(1-\nu^2)} A_m^3) \frac{\sin m\theta_\nu}{m} > 0, \quad (13)$$

где

$$\Delta^\pm(x) = \frac{1}{l} [V^+(x, \pm h) - V^-(x, \pm h)].$$

На основании формул (10) и (11) исследовано изменение коэффициентов интенсивности в окрестностях внешних и внутренних вершин трещин в зависимости от расстояния между трещинами, а на основании формулы (13) произведены подсчеты скачков перемещений верхних и нижних берегов трещин при данной нагрузке.

На рис. 1 приведены графики изменения коэффициента интенсивности усилий $K_1^* = \frac{K_1}{N_1^0 \sqrt{l}}$ в пластине ($\lambda = 0$) при плоском напряженном состоянии (кривая 1) и в оболочке при $M_1^0 = 0$ для величины $\lambda = 0,5$ (кривая 2) и $\lambda = 1$ (кривая 3) в зависимости от параметра $\rho = \frac{l}{a}$, где $\lambda = \beta l$. Сплошные линии соответствуют коэффициенту интенсивности для внутренних

вершин трещин, штриховые — для внешних. Как видно из графиков, взаимодействие полей напряжений трещин начинается при значении параметра $\rho = 0,4$. По мере сближения трещин коэффициенты интенсивности для внутренних вершин трещин возрастают быстрее, стремясь к бесконечности, в то время как у внешних вершин они стремятся к величинам, соответствующим одной трещине с двойной длиной. При этом, чем больше величина λ , тем больше значения коэффициентов интенсивности.

На рис. 2 приведены графики изменения коэффициента интенсивности моментов $K_3^* = \frac{K_3}{RcN_1^0 \sqrt{l}}$ в оболочке при $M_1^0 = 0$ для величины $\lambda = 0,5$ (кривая 1) и $\lambda = 1$ (кривая 2) в зависимости от параметра ρ . Как и на рис. 1,

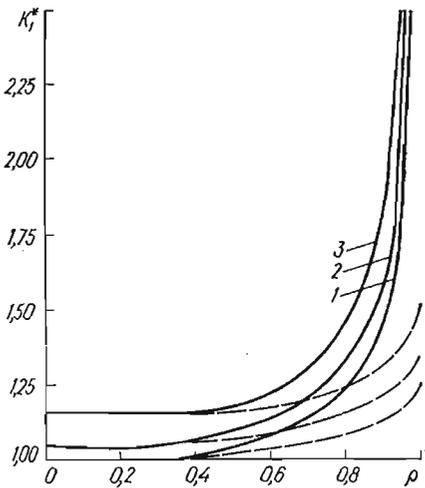


Рис. 1

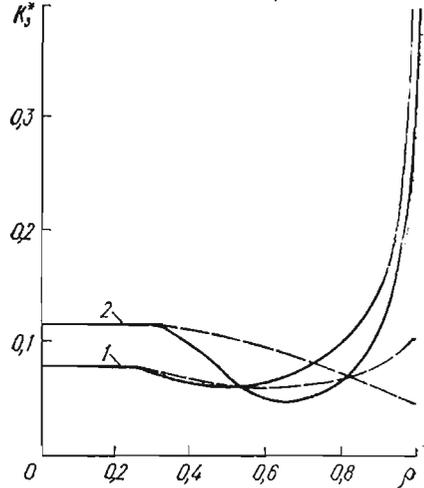


Рис. 2

сплошными и штриховыми линиями обозначено изменение коэффициентов интенсивности у внутренних и внешних вершин трещин соответственно. Сравнивая кривые 1 и 2, устанавливаем, что взаимодействие трещин начинается уже при значении параметра $\rho = 0,3$. Кроме того, величины K_3^* у внутренних вершин при дальнейшем сближении трещин сначала уменьшаются, затем начинают возрастать, стремясь к бесконечности. При этом для величины $\lambda = 1$ коэффициент интенсивности уменьшается на большую величину, а затем возрастает стремительнее, чем для $\lambda = 0,5$.

Отметим, что по формуле (13) произведены подсчеты величины $\Delta^\pm(x)$ в двух случаях, когда одновременно с растягивающими усилиями N_1^0 к берегам трещин были приложены изгибающие моменты $M_1^0 = 0$ и $M_1^0 = RcN_1^0$. В обоих случаях контакт берегов трещин не наступил. Однако при $M_1^0 = RcN_1^0$ расстояние между нижними берегами трещин, сближающимся при данной нагрузке, меньше, чем при $M_1^0 = 0$. При сближении трещин до значения параметра $\rho = 0,7$ функция $\Delta^\pm(x)$ остается симметричной относительно середины трещины. В дальнейшем под действием полей напряжений сближающихся трещин происходит раскрытие их у внутренних вершин, что в конечном итоге приводит к разрыву перемычки между трещинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973. 303 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. К., «Наук. думка», 1976. 443 с.

4. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.I 1977 г.

УДК 517.63

О. В. Побережный, Я. Д. Пяныло

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЗАДАЧАМ
ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ**

Многие задачи нестационарной термоупругости, в том числе для тел с трещинами, легко разрешимы в трансформантах Лапласа. Проблема приближенного обращения преобразования Лапласа, и в особенности численного его обращения, возникла из потребности довести решение до числа в том случае, когда существующие таблицы функций и их изображений не дают возможности по изображению найти оригинал или требуют очень больших вычислений.

Задачу численного обращения преобразования Лапласа можно решить методами [2], основанными на разложении оригинала в ряды по ортогональным многочленам. Тогда искомая функция $f(t)$ представляется рядом

$$f(t) = h(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(e^{-\sigma t}), \quad (1)$$

где $p_n(e^{-\sigma t})$ — ортонормированные многочлены на промежутке $[0, 1]$, которые записываются в виде разложения

$$p_n(e^{-\sigma t}) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^n e^{-j\sigma t}, \quad (2)$$

$$\alpha_j^n = \sum_{i=0}^n \alpha_i^n \sigma F(\sigma_j); \quad (3)$$

$F(p)$ — изображение Лапласа функции $f(t)$; $h(t)$ — весовая функция ортогональных многочленов; $\sigma > 0$ — свободный параметр.

Таким образом, задача численного обращения преобразования Лапласа сведена к вычислению коэффициентов a_n по формуле (3). При этом мы встречаемся с проблемой умножения очень больших чисел α_j^n на очень малые $\sigma F(\sigma_j)$. Как известно [5], в таких операциях теряется точность вычисления. Для устранения этого недостатка выведем асимптотическую формулу для a_n , устанавливаемую следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $f(t)$, $t \in [0, \infty]$ — непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойствами

$$f(t) \cong \begin{cases} C + Dt^\gamma e^{-ut^\nu}, & t \rightarrow 0, \\ A + Bt^\delta e^{-vt}, & t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4)$$

где $A, C, \gamma, \delta, \nu$ — произвольные числа; $D, B \neq 0$; $u, v \geq 0$. Тогда при достаточно больших n имеет место асимптотическая формула для a_n при разложении оригинала по смещенным многочленам Якоби

$$p_n(e^{-\sigma t}) = \frac{1}{\sqrt{r_n}} P_n^{(\alpha, \beta)}(e^{-\sigma t}), \quad r_n = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! m \Gamma(m - n)},$$

$$a_n \cong \frac{2}{\sqrt{\pi n r_n}} \left\{ (-1)^{n+1} A \sin \pi \beta \Gamma\left(-\beta - \frac{1}{2}\right) m^{\beta + \frac{1}{2}} + \right.$$