

Перейдем теперь к теореме, составляющей содержание заглавия настоящей статьи.

Пусть X, X_1, Y, Y_1 — линейные пространства, $A: X \rightarrow X_1, B: Y \rightarrow Y_1$ — линейные операторы. Так как $\{x, y\} \rightarrow (Ax \otimes By)$ является билинейным отображением из $X \otimes Y$ в $X_1 \otimes Y_1$, то согласно сказанному выше существует единственное такое линейное отображение $A \otimes B: X \otimes Y \rightarrow X_1 \otimes Y_1$, что

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, (Ax) \otimes (By) = (A \otimes B)(x \otimes y).$$

Теорема заключается в том, что преобразование $\{A, B\} \rightarrow A \otimes B$, рассматриваемое как отображение из $L(X, X_1) \otimes L(Y, Y_1)$ в $L(X \otimes Y; X_1 \otimes Y_1)$, где $L(U, V)$ обозначает линейное пространство линейных отображений из U в V , является тензорным.

Для доказательства предположим, что $\sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha} \otimes B_{\alpha} = 0$ и A_1, \dots, A_n линейно независимы. В силу условия A' достаточно сказать, что $B_1 = \dots = B_n = 0$. Рассуждая от противного, предположим, что для некоторого $y_0 \in Y$ не все векторы $B_{\alpha}y_0$ равны нулю. Пусть $B_{\alpha}y_0 = \sum_{k=1}^s \lambda_{\alpha k} e_k$, где e_1, \dots, e_s линейно независимы. Для любого $x \in X$ имеем

$$0 = \sum_{\alpha} (A_{\alpha}x) \otimes (B_{\alpha}y_0) = \sum_k \left(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha k} A_{\alpha}x \right) \otimes e_k,$$

откуда в силу тензорности отображения $\{x, y\} \rightarrow x \otimes y$ следует, что $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha k} x \otimes A_{\alpha} = 0$ при $k = 1, \dots, s$, что противоречит линейной независимости операторов A_{α} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра. М., Физматгиз, 1962. 516 с.
2. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971. 359 с.

Львовский университет
Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.XII 1976 г.

УДК 539.3

Н. Д. Грилицкий, Г. С. Кит

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНЫ С ЧАСТИЧНО КОНТАКТИРУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ

Рассмотрим бесконечную упругую плоскость с прямолинейной трещиной (математическим разрезом) L длины $2l$, расположенной на оси Ox симметрично относительно начала координат. Пусть в плоскости без трещины известны стационарное температурное поле и внешние нагрузки. Предположим, кроме того, что на трещине заданы направленные по нормали к ней тепловые потоки, температура или условия теплопроницаемости. Тогда температурное поле определяется источниками и диполями тепла, расположенными на отрезке L с определенной плотностью [1].

Пусть указанные выше силовые и температурные факторы вызывают в сплошной плоскости напряжения $\sigma_{ij}(x, y)$ ($i, j = x, y$). Определим напряженное состояние в окрестности трещины в предположении, что в процессе деформации ее берега приходят частично в гладкий контакт. Это напряженное состояние будет определено, если известна функция [1]

$$\omega(x) = \omega_1(x) - i\omega_2(x) = D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)] \right\}, \quad (1)$$

где $D = \frac{G}{\pi(1+\kappa)}$; G — модуль сдвига; $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации; $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ для обобщенного плоского напряженного состояния; ν — коэффициент Пуассона; u, v — перемещения; индексы «+» и «-» указывают на предельные значения соответствующих величин слева и справа от линии L . Для определения $\omega(x)$ имеем уравнение

$$2 \int_L \frac{\omega(\xi) d\xi}{\xi - x} = p(x), \quad (2)$$

где $p(x) = p_1(x) - ip_2(x) = -[\sigma_{yy}(x, 0) - i\sigma_{xy}(x, 0)]$.

Рассмотрим отдельно случаи, когда берега трещины нагружены нормальными $p_1(x)$ и касательными $p_2(x)$ усилиями. Если $p_1(x) > 0$ или $p_1(x) < 0$ для всех $x \in L$, то берега трещины не контактируют или полностью контактируют. В первом случае $\omega_1(x)$ определяется по формуле

$$\omega_1(x) = -\frac{1}{2\pi^2 \sqrt{l^2 - x^2}} \int_L \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2} p_1(\xi) d\xi}{\xi - x}, \quad (3)$$

а во втором случае $\omega_1(x) \equiv 0$ и нормальные напряжения $\sigma_{yy}(x, 0)$ будут такими же, как в сплошной плоскости.

Пусть теперь функция $p_1(x)$ несколько раз меняет знак на линии L . Тогда берега трещины могут сконтактировать на нескольких участках.

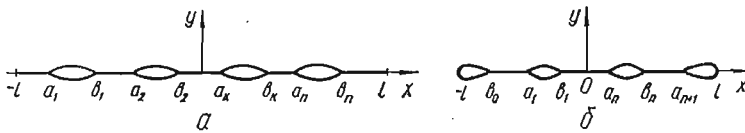


Рис. 1

Обозначим совокупность n областей, на которых нет контакта, через $L' = \bigcup_{k=1}^n L'_k$, $L'_k = [a_k, b_k]$ и предположим, что трещина на концах сконтактировала, т. е. $-l < a_1$ и $b_n < l$ (рис. 1, а). Тогда из физических соображений очевидно, что решение уравнения (2) должно быть ограниченным на концах отрезков L_k (вследствие плавного смыкания берегов трещины в точках a_k и b_k). Это решение дается формулой [4]

$$\omega_1(x) = -\frac{X_n(x)}{2\pi^2} \int_{L'} \frac{p_1(\xi) d\xi}{X_n(\xi)(\xi - x)}, \quad X_n(z) = \prod_{k=1}^n [(z - a_k)(z - b_k)]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

причем оно существует тогда и только тогда, когда $p_1(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{L'} \frac{p_1(x) x^j dx}{X_n(x)} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (5)$$

Можно показать, что последние условия являются следствием равенства нулю коэффициентов интенсивности напряжений в точках a_k и b_k . Равенства (5) дают возможность установить наличие областей контакта при заданной нагрузке $p_1(x)$ и служат одновременно уравнениями для определения границ этих областей. Остальные n уравнений для определения границ следуют из очевидных условий

$$\int_{a_k}^{b_k} \omega_1(x) dx = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Контактные усилия на трещине и напряжения на ее продолжении определяются по формуле

$$\sigma_{yy}^p(x) = 2 \operatorname{Re} \Phi(x) - p_1(x), \quad \Phi(z) = \int_{L'} \frac{\omega_1(\eta) d\eta}{\eta - z}. \quad (7)$$

Выражение для $\Phi(z)$ с учетом формулы (4) записывается в виде

$$\Phi(z) = \frac{X_n(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\rho_1(\xi) d\xi}{X_n(\xi)(\xi - z)}. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда в окрестности концов трещины на участках $L'' = [-l, b_0] \cup [a_{n+1}, l]$ нет контакта (рис. 1, б). Тогда решение уравнения (2) дается формулой

$$\omega_1(x) = -\frac{X_n(x) X_0(x)}{2\pi^2 \sqrt{l^2 - x^2}} \int_{L'+L''} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2} \rho_1(\xi) d\xi}{X_n(\xi) X_0(\xi)(\xi - x)}, \quad (9)$$

где $X_0(z) = \sqrt{(z - b_0)(a_{n+1} - z)}$. Решение (9) существует при n дополнительных условиях

$$\int_{L'+L''} \frac{\sqrt{l^2 - x^2} x^j \rho_1(x) dx}{X_n(x) X_0(x)} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (10)$$

Условия (6), (10), а также $\int_{-l}^{b_0} \omega_1(x) dx = 0$ и $\int_{a_{n+1}}^l \omega_1(x) dx = 0$ служат для определения $2n + 2$ границ областей контакта.

Контактные усилия и напряжения на продолжении трещины определяются по формуле (7), причем комплексный потенциал $\Phi(z)$ выражается формулой (8) после замены в ней $X_n(x)$ на $X_n(x) X_0(x) (l^2 - x^2)^{-1/2}$.

Заметим, что если в формуле (9) положить $b_0 = -l$, $a_{n+1} = l$, то она преобразуется к виду (4). Из (9) легко получить также случай, когда на одном из концов трещины есть контакт, а на другом — нет. Подставляя выражение (9) в формулу

$$k_1(\pm l) = \mp 2 \sqrt{\frac{\pi^3}{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} \omega_1(x),$$

получаем значения коэффициентов интенсивности напряжений

$$k_1(\pm l) = -\frac{X_n(\pm l) X_0(\pm l)}{\sqrt{\pi l}} \int_{L'+L''} \frac{\sqrt{l \pm \xi} \rho_1(\xi) d\xi}{\sqrt{l \mp \xi} X_n(\xi) X_0(\xi)}. \quad (11)$$

Если на берегах трещины задана только касательная нагрузка $p_2(x)$, которая вследствие гладкости контактирующих участков не зависит от контактных усилий*, то решение уравнения (2) дается формулой (3) при замене в последней индекса «1» на «2». Для коэффициентов интенсивности напряжений k_2 имеем выражение

$$k_2(\pm l) = -\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{l \pm \xi}}{\sqrt{l \mp \xi}} p_2(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Пример. Пусть плоскость нагружена так, что на месте расположения трещины $\sigma_{yy}(x, 0) = -(c + dx^2)$, на бесконечности задан однородный тепловой поток $\lambda \frac{\partial t_\infty}{\partial y} = -q$ (λ — коэффициент теплопроводности, $t_\infty = -\frac{q}{\lambda} y$), раскрытые участки трещины теплоизолированы, а на контактирующих участках осуществляется идеальный тепловой контакт. Предположим сначала, что на участке $[-a, a]$ трещина раскрыта, а на остальной части контактирует (тогда должно выполняться условие $c < 0$, $d > 0$). По формуле (4) находим

$$\omega_1(x) = -\frac{dx}{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2},$$

* Не представляет труда рассмотреть более общий случай, когда на контактирующих участках существует трение по закону Кулона, пропорциональное контактным усилиям.

причем границы контакта, определяемые соотношением (5), $\pm a = \sqrt{-\frac{2c}{d}}$. В этом случае условие (6) выполняется тождественно. Контактные усилия и нормальные напряжения на продолжении трещины определяются по формуле

$$\sigma_{yy}^p(x, 0) = -\sqrt{x^2 - a^2} d |x|,$$

где радикал принимает свое арифметическое значение.

Наличие теплоизолированного раскрытого участка трещины, обуславливающего возмущение заданного однородного теплового потока, эквивалентно расположению на участке $[-a, a]$ диполей тепла с плотностью [3] $\gamma(x) = -\frac{2q}{\lambda} \times \sqrt{a^2 - x^2}$, которые вызывают на оси Ox напряжения

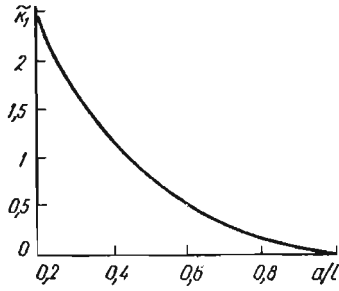


Рис. 2

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, 0) = -p_2(x) &= D\alpha_t \int_{-a}^a \frac{\gamma(\xi) d\xi}{\xi - x} = \\ &= -\frac{2q\pi D\alpha_t}{\lambda} [x + \sqrt{a^2 - x^2} \theta(|x| - a)], \end{aligned}$$

(13)

где α_t — коэффициент теплового расширения; $\theta(x)$ — функция Хевисайда. После подстановки выражения (13) в формулу (3) (с заменой индекса «1» на «2») найдем

$$\omega_2(x) = \frac{2q\pi D\alpha_t}{\lambda} \left[\frac{2a^2}{\sqrt{l^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2} \theta(a - |x|) \right]$$

и соответственно

$$k_2(\pm l) = \mp \frac{4Dq\alpha_t a^2}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi^3}{l}}. \quad (14)$$

Предположим теперь, что на участке $[-a, a]$ трещина контактирует, а на остальной части раскрыта ($c > 0, d < 0$). По формуле (9) в этом случае находим

$$\omega_1(x) = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2\pi^2 \sqrt{l^2 - x^2}} \left(\int_{-l}^{-a} + \int_a^l \right) \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2} p_1(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2} (\xi - x)}.$$

Для контактных усилий и коэффициентов интенсивности напряжений имеем соответственно выражения

$$\sigma_{yy}^p(x) = -\left[c + dx^2 - \frac{d}{2} (l^2 - a^2) \right] \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad (15)$$

$$k_1(\pm l) = \sqrt{\frac{\pi(l^2 - a^2)}{l}} \left[-c - \frac{d}{2} (l^2 + a^2) \right], \quad (16)$$

причем граница области контакта a определяется на основании условия (6) из равенства

$$\frac{d}{3} [2(l^2 + a^2) E(e) - a^2 F(e)] + (A - da^2) E(e) - A \frac{a^2}{l^2} F(e) = 0,$$

где $F(e)$ и $E(e)$ — полные эллиптические интегралы I и II рода,

$$e = \sqrt{1 - a^2/l^2}, \quad A = c - d(l^2 - a^2)/2.$$

Однородный тепловой поток будет возмущаться в данном случае двумя раскрытыми участками трещины; выражение для плотности тепловых диполей $\gamma(x)$ приведено в работе [2]. По этому значению $\gamma(x)$ можно определить функцию $\omega_2(x)$ и коэффициенты $k_2(\pm l)$.

На рис. 2 приведена зависимость от параметра a величины $\tilde{k}_1 = \frac{k_1}{c \sqrt{\pi l}}$, подсчитанной по формуле (16). Из графика видно, что с увеличением области контакта коэффициент интенсивности напряжений уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С. Метод днсторсин в теории термоупругости тел с трещинами.— ФХММ, 1975, 11, № 3, с. 9—20.
2. Кит Г. С., Дорош Н. А. Термоупругое состояние плоскости с двумя равными прямолинейными трещинами.— Концентрация напряжений, 1971, вып. 3, с. 61—67.
3. Кит Г. С., Подстригац Я. С. Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением.— ФХММ, 1966, 2, № 3, с. 247—252.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968. 511 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
17.III 1977 г.

УДК 539.3

Е. М. Федюк

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ПОПЕРЕЧНЫХ ТРЕЩИН

Рассмотрим отнесенную к декартовой прямоугольной системе координат xOy бесконечную пологую цилиндрическую оболочку с системой N поперечных прямолинейных в плане трещин (разрезов) длиной $2l_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), расположенных вдоль координатных линий $x = \text{const}$. Предположим, что берега трещин загружены самоуравновешивающими усилиями и моментами и в процессе деформации не контактируют. На каждой трещине введем локальную систему координат $x_k O_k y_k$, начало которой поместим в центре трещины, а ось $O_k x_k$ направим по линии трещины. Центры трещин в базисной системе координат xOy имеют координаты (x_k^0, y_k^0) , а оси $O_k x_k$ образуют с осью Ox углы $\beta_k = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Используя предложенный в работе [4] метод решения задач теории тонких оболочек с трещинами, для полой цилиндрической оболочки [1] с поперечной трещиной $|x_k| \leq l_k, y_k = 0$ получаем систему дифференциальных уравнений относительно функции напряжений φ_k и функции прогибов w_k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_0} \nabla^2 \nabla^2 \varphi_k - \frac{1}{R} \nabla_2^2 w_k &= -F_1^0(x_k, y_k), \\ D_1 \nabla^2 \nabla^2 w_k + \frac{1}{R} \nabla_2^2 \varphi_k &= -D_1 F_2^0(x_k, y_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1^0 &= \nabla_1^2 \varepsilon_{11}^0 - \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{12}^0; \quad F_2^0 = (\nabla_2^2 + \nu \nabla_1^2) \kappa_{11}^0 + 2(1 - \nu) \nabla_1 \nabla_2 \kappa_{12}^0; \\ \nabla^2 &= \nabla_1^2 + \nabla_2^2; \quad \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y_k}; \end{aligned}$$

$D_0 = 2Eh$; $D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)}$; E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; R и $2h$ — радиус срединной поверхности и толщина оболочки;