ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л.* Интегрирование в функциональных пространствах.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ. М., 1967, с. 83—124.
2. *Ковальчик И. М.* Интеграл Винера.— Успехи мат. наук, 1963, 18, № 1, с. 97—134.
3. *Ковальчик І. М.* Кратний континуальний інтеграл та характеристична задача для деякої системи диференціальних рівнянь.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 4, с. 303—306.
4. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями.— Успехи мат. наук, 1962, 17, № 5, с. 3—115.
5. *Ковальчик І. М.* Континуальний інтеграл у просторі C_2 від виразів, що містять квадратичний функціонал.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 2, с. 110—113.
6. *Ковальчик И. М.* Некоторые преобразования кратных интегралов Винера.— Укр. мат. журн., 1960, 12, № 1, с. 25—31.
7. *Bearman J. E.* Rotations in the product of two Wiener spaces.— Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, N 1, p. 129—137.
8. *Cameron R. H., Storvick D. A.* Two related integrals over spaces of continuous functions.— Pacif. J. Math., 1974, 55, N 1, p. 19—37.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 11.V 1976 г.

УДК 513.88

В. Э. Лянце, О. Г. Сторож

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЯВЛЯЕТСЯ ТЕНЗОРНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ

Предлагается следующий подход к понятию тензорного умножения. Через X, Y, Z, Z_1, Z_2, ... обозначаем линейные пространства над полем комплексных чисел C, через b, b_1, b_2, ... — билинейные отображения, заданные на $X \times Y$ и принимающие значения соответственно в Z, Z_1, Z_2, ... Рассмотрим равенство вида

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b(x_\alpha, y_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{p} b(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\beta), \quad x_\alpha, \tilde{x}_\beta \in X, \quad y_\alpha, \tilde{y}_\beta \in Y. \tag{1}$$

Условимся называть билинейное отображение b_1 старшим билинейного отображения b_2, если из того, что соотношение (1) выполняется для некоторых x_α, $\tilde{x}_\beta$, y_α, $\tilde{y}_\beta$ при $b = b_1$ вытекает, что оно выполняется для этих же x_α, $\tilde{x}_\beta$, y_α, $\tilde{y}_\beta$ при $b = b_2$. Билинейное отображение назовем тензорным отображением, если оно старше любого билинейного отображения. Таким образом, если $\{x, y\} \to x \otimes y$ — тензорное отображение, то из равенства

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \otimes y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} \tilde{x}_\beta \otimes \tilde{y}_\beta, \quad x_\alpha, \tilde{x}_\beta \in X, \; y_\alpha, \tilde{y}_\beta \in Y \tag{2}$$

вытекает, что (1) выполняется для любого билинейного отображения b.

Легко видеть, что для того чтобы билинейное отображение $\{x, y\} \to x \otimes y$ было тензорным, достаточно (и необходимо), чтобы для любого билинейного функционала b: $X \times Y \to C$ из (2) вытекало (1). Из этого определения очевидным способом вытекает следующее утверждение, которое обычно полагается в основу понятия тензорного умножения [1, 2].

Пусть на $X \times Y$ задано тензорное отображение $\otimes$ и пусть b: $X \times Y \to Z$ — некоторое билинейное отображение. Положим

$$l\left(\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \otimes y_\alpha\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{\alpha=1}^{n} b(x_\alpha, y_\alpha), \quad x_\alpha \in X, \quad y_\alpha \in Y. \tag{3}$$

Формула (3) определяет однозначное отображение l: $X \otimes Y \to Z$, где $X \otimes Y$ обозначает линейную оболочку в Z множества $\{x \otimes y, x \in X, y \in Y\}$.

Отображение l линейно, удовлетворяет равенству

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y \quad b(x, y) = l(x \otimes y) \tag{4}$$

и является единственным линейным отображением, удовлетворяющим (4).

Для произвольных линейных пространств X и Y тензорное отображение, заданное на $X \times Y$, существует и единственное с точностью до изоморфизма.

Для того чтобы билинейное отображение $\{x, y\} \to x \otimes y$ было тензорным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось какое-либо из следующих условий:

А. Если выполняется (2) и элементы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы в X, то элементы $y_1, \ldots, y_n$ являются линейными комбинациями элементов $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_p$.

А$'$. Если $\Sigma_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \otimes y_\alpha = 0$ и x_α линейно независимы, то $y_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, n$.

Б. Если $d_1, \ldots, d_n$ линейно независимы в X, а $e_1, \ldots, e_p$ линейно независимы в Y, то

$$d_1 \otimes e_1, \; \ldots, \; d_1 \otimes e_p, \; \ldots, \; d_n \otimes e_1, \; \ldots$$

$\ldots, d_n \otimes e_p$ линейно независимы в $X \otimes Y$.

Для доказательства необходимости условия A строим линейные функционалы $x_1', \ldots, x_n'$ на X, образующие вместе с (линейно независимыми) элементами $x_1, \ldots, x_n$ биортогональную систему, и полагаем $b_k(x, y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} x_k'(x)\, y$. Тогда b_k есть билинейное отображение $X \times Y \to Y$. Поэтому если выполняется (2), то выполняется (1) при $b = b_k$, откуда $y_k = \Sigma_{\beta=1}^{p} b_k(\tilde{x}_\beta)\, \tilde{y}_\beta$.

Необходимость условия Б легко следует из необходимости условия А$'$, а необходимость А$'$ есть очевидное следствие необходимости А.

Докажем достаточность условия Б. Пусть $\sum_\alpha x_\alpha \otimes y_\alpha = 0$. Представляем x_α и y_α в виде $x_\alpha = \sum_k \lambda_{\alpha k} d_k$, $y_\alpha = \sum_l \mu_{\alpha l} e_l$, где $\lambda_{\alpha k}, \mu_{\alpha l} \in C$, а d_k и e_l образуют системы, линейно независимые соответственно в X и Y. Тогда

$$0 = \sum_\alpha x_\alpha \otimes y_\alpha = \sum_k \sum_l \left(\sum_\alpha \lambda_{\alpha k} \mu_{\alpha l} \right) d_k \otimes e_l,$$

а так как в силу Б $d_k \otimes e_l$ образуют систему, линейно независимую в $X \otimes Y$, то $\forall k, \forall l \; \sum_\alpha \lambda_{\alpha k} \mu_{\alpha l} = 0$. Следовательно, если b — произвольное билинейное отображение b: $X \times Y \to Z$, то

$$\sum_\alpha b(x_\alpha, y_\alpha) = \sum_k \sum_l \left(\sum_\alpha \lambda_{\alpha k} \mu_{\alpha l} \right) b(d_k, e_l) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Полезность предыдущего признака проиллюстрируем следующим примером. Пусть пространства X, Y, Z реализованы как линейные пространства комплекснозначных функций, заданных соответственно на множествах S, T и $S \times T$. Для произвольных $x \in X$, $y \in Y$ положим

$$(x \otimes y)(s, t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} x(s)\, y(t), \quad s \in S, \quad t \in T. \tag{5}$$

Отображение $\{x, y\} \to x \otimes y$ тензорно. Действительно, пусть $d_1, \ldots, d_n$ линейно независимы в X. Существуют такие $s_1, \ldots, s_n \in S$, что ранг матрицы $\{d_\alpha(s_k)\}$ равен n. Далее, для линейно независимых в Y функций $e_1, \ldots, e_p$ находим такие $t_1, \ldots, t_p \in T$, что ранг матрицы $\{e_\beta(t_l)\}$ равен p. Теперь, если для некоторых $\lambda_{\alpha\beta} \in C$ имеет место равенство $\sum_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha\beta} d_\alpha \otimes e_\beta = 0$, то в силу (5) $\sum_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha\beta} d_\alpha(s_k)\, e_\beta(t_l) = 0$, откуда следует, что все $\lambda_{\alpha\beta}$ равны нулю.

Перейдем теперь к теореме, составляющей содержание заглавия настоящей статьи.

Пусть X, X_1, Y, Y_1 — линейные пространства, $A\colon X \to X_1$, $B\colon Y \to Y_1$ — линейные операторы. Так как $\{x, y\} \to (Ax \otimes By)$ является билинейным отображением из $X \otimes Y$ в $X_1 \otimes Y_1$, то согласно сказанному выше существует единственное такое линейное отображение $A \otimes B : X \otimes Y \to X_1 \otimes Y_1$, что

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad (Ax) \otimes (By) = (A \otimes B)(x \otimes y).$$

Теорема заключается в том, что преобразование $\{A, B\} \to A \otimes B$, рассматриваемое как отображение из $L(X, X_1) \otimes L(Y, Y_1)$ в $L(X \otimes Y; X_1 \otimes Y_1)$, где $L(U, V)$ обозначает линейное пространство линейных отображений из U в V, является тензорным.

Для доказательства предположим, что $\Sigma_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \otimes B_\alpha = 0$ и $A_1, \ldots, A_n$ линейно независимы. В силу условия A$'$ достаточно сказать, что $B_1 = \ldots = B_n = 0$. Рассуждая от противного, предположим, что для некоторого $y_0 \in Y$ не все векторы $B_\alpha y_0$ равны нулю. Пусть $B_\alpha y_0 = \Sigma_{k=1}^{s} \lambda_{\alpha k} e_k$, где $e_1, \ldots, e_s$ линейно независимы. Для любого $x \in X$ имеем

$$0 = \sum_\alpha (A_\alpha x) \otimes (B_\alpha y_0) = \sum_k \left(\sum_\alpha \lambda_{\alpha k} A_\alpha x \right) \otimes e_k,$$

откуда в силу тензорности отображения $\{x, y\} \to x \otimes y$ следует, что $\sum_\alpha \lambda_{\alpha k} \times A_\alpha = 0$ при $k = 1, \ldots, s$, что противоречит линейной независимости операторов A_α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурбаки Н.* Алгебра. М., Физматгиз, 1962. 516 с.
2. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971. 359 с.

Львовский университет
Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.XII 1976 г.

УДК 539.3

Н. Д. Грилицкий, Г. С. Кит

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНЫ С ЧАСТИЧНО КОНТАКТИРУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ

Рассмотрим бесконечную упругую плоскость с прямолинейной трещиной (математическим разрезом) L длины $2l$, расположенной на оси $0x$ симметрично относительно начала координат. Пусть в плоскости без трещины известны стационарное температурное поле и внешние нагрузки. Предположим, кроме того, что на трещине заданы направленные по нормали к ней тепловые потоки, температура или условия теплопроницаемости. Тогда температурное поле определяется источниками и диполями тепла, расположенными на отрезке L с определенной плотностью [1].

Пусть указанные выше силовые и температурные факторы вызывают в сплошной плоскости напряжения $\sigma_{ij}(x, y)$ $(i, j = x, y)$. Определим напряженное состояние в окрестности трещины в предположении, что в процессе деформации ее берега приходят частично в гладкий контакт. Это напряженное состояние будет определено, если известна функция [1]

$$\omega(x) = \omega_1(x) - i\omega_2(x) = D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)\right]\right\}, \qquad (1)$$