Доказательство. В силу (6), (4) имеем

$$E|u(t, x, \omega)-\psi(x, \omega)|^2 = E\left[\int\limits_{E_n} G(t, x-y)\varphi(y, \omega)\,dy-\psi(x, \omega)\right]^2 \times$$

$$\times \exp\left\{\int\limits_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\} + 2E\left[\int\limits_{E_n} G(t, x-y)\varphi(y, \omega)\,dy-\psi(x, \omega)\right]\psi(x, \omega)\times$$

$$\times\left[\exp\left\{\int\limits_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\}-1\right] + E\psi^2(x, \omega)\left[\exp\left\{\int\limits_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\}-1\right].$$

Из условий теоремы и неравенства Гельдера следует, что первое и второе слагаемые стремятся к нулю при $t \to \infty$. Последнее слагаемое превращается в нуль только тогда, когда тождество $\psi(x, \omega) \equiv 0$ почти неверное. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоренко Л. Н.* Об устойчивости решений стохастических уравнений в частных производных.— В кн.: Распределенное управление процессами в сложных системах. К., 1973, с. 45—55.
2. *Федоренко Л. Н.* О стабилизации случайного решения задачи Коши для параболических систем.— В кн.: Математические модели сложных систем. К., 1974, с. 80—87.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М., «Наука», 1964. 315 с.

Черновицкий университет

Поступила в редколлегию 20.III 1976 г.

УДК 517.946

И. В. Коробчук

О РАЗРЕШИМОСТИ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Пусть S — достаточно гладкая замкнутая поверхность в n-мерном пространстве R^n; D_l — область, ограниченная поверхностью S и содержащая бесконечность; $D_i = R^n \setminus D_l$. Рассмотрим вопрос единственности в D_l решения уравнения

$$\Delta u + \omega^2 u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе S области D_l условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\,|_S = f \tag{2}$$

и условию излучения Зоммерфельда при $r \to \infty$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u = e^{i\omega r} o\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right), \quad \operatorname{Im}\omega \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\omega = \alpha + i\beta$; $\sigma(P)$, $f(P)$ — достаточно гладкие функции на S, причем $\operatorname{Im}\sigma(P) \equiv 0$.

Теорема. Если $\sigma(P) \in C_{[S]}$, то задача (1)—(3) имеет не более одного решения, когда в области $\overline{D}_l$ существуют непрерывные действительные функции $B_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$ с кусочно-непрерывными производными $\frac{\partial B_j}{\partial x_j}$, которые удовлетворяют условию

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^n \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n B_j^2 + \beta^2 > 0, \\ \sum_{j=1}^n B_j \cos(\widehat{n, x_j}) - \sigma\,|_S \leqslant 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Доказательство. Докажем, что если выполняются условия (4), то однородная задача, соответствующая задаче (1)—(3), имеет решение $u \equiv 0$. Доказательство проведем от противного.

Пусть S_r — сфера радиуса r, расположенная в D_l, которая содержит область D_i; D_r — область, заключенная между поверхностями S и S_r; $\bar{n}$ — внешняя по отношению к D_r нормаль. Применим формулу Грина к функции u и комплексно-сопряженной ей функции $\bar{u}$ в области D_r:

$$\iint\limits_{D_r} (\bar{u}\Delta u + |\operatorname{grad} u|^2)\, dD_r = \int\limits_{S+S_r} \bar{u} \frac{du}{dn} dS. \tag{*}$$

Составим выражение

$$\iint\limits_{D_r} \left[\bar{u}\Delta u + |\operatorname{grad} u|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_j u\bar{u}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_j u\bar{u})\right] dD_r = \int\limits_{S+S_r} \bar{u} \frac{du}{dn} dS,$$

или

$$\iint\limits_{D_r} \left[\bar{u}\Delta u + |\operatorname{grad} u|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_j u\bar{u})\right] dD_r =$$

$$= \int\limits_{S+S_r} \left[\bar{u} \frac{du}{dn} + \sum_{j=1}^{n} B_j u\bar{u} \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{x}_j})\right] dS.$$

Так как u удовлетворяет на бесконечности условию излучения (3), то для нее имеет место асимптотика [1]

$$u = e^{i\omega r} O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right). \tag{5}$$

Из выражений (1)—(3) и (5) следует, что

$$\iint\limits_{D_r} \left[-\omega^2 |u|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_j u\bar{u})\right] dD_r = \int\limits_{S} \left[\sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{\bar{n}, x_j}) - \sigma\right] \times$$

$$\times |u|^2 dS + (-\beta + i\alpha) \int\limits_{S_r} |u|^2 dS + e^{-2\beta r} \int\limits_{S_r} o\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) dS +$$

$$+ e^{2i\omega r} \int\limits_{S_r} \sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{n, x_j})\, o\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) dS,$$

или

$$\iint\limits_{D_r} \left[(\beta^2 - \alpha^2 - 2i\alpha\beta)|u|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_j u\bar{u})\right] dD_r =$$

$$= \int\limits_{S} \left[\sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{x}_j}) - \sigma\right] |u|^2 dS + i\omega \int\limits_{S_r} |u|^2 dS +$$

$$+ e^{-2\beta r} \int\limits_{S_r} o\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) dS + e^{i2\omega r} \int\limits_{S_r} \sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{n, x_j})\, o\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) dS.$$

Устремляя $r \to \infty$ и учитывая, что при действительном ω регулярное решение уравнения (1), которое удовлетворяет на бесконечности условию $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{S_r} |u|^2 dS = 0$, есть тождественный нуль [3], получаем

1) $\alpha \neq 0$, $u \equiv 0$ в области D_l независимо от $\sigma(P)$, $B_j \equiv 0$ $(j = \overline{1, n})$;

2) $\alpha = 0$, $u \equiv 0$, так как в противном случае квадратичные формы действительных и мнимых частей функции $u = u_1 + iu_2$ в левой части равенства будут положительно определены, если в D_l выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} B_j^2 + \beta^2 > 0,$$

а подынтегральное выражение первого слагаемого справа будет отрицательным, если

$$\sum_{j=1}^{n} B_j \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{x}_j}) - \sigma(P)|_S \leqslant 0;$$

полученное противоречие указывает на то, что $u \equiv 0$;

3) $\alpha = 0$, $u \equiv 0$, если $\sigma(P) \geqslant 0$, так как неравенства (4) выполняются при $B_j \equiv 0$ $(j = \overline{1, n})$.

Заметим, что теорема единственности (3) работы [2] следует из случаев 1), 3).

Для решения неравенств (4) берем функции $B_j(x)$ в виде $B_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \sigma^*$, где $\sigma^* = \max\limits_S |\sigma|$; φ — нормальное уравнение поверхности S [4]. Тогда

$$\sigma^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} - (\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 + \beta^2 > 0,$$

$$\sigma^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{x}_j}) - \sigma|_S \leqslant 0.$$

Эти неравенства будут выполняться, если

$$\beta^2 > (\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 - \sigma^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}.$$

Таким образом, получен простой достаточный признак единственности задачи (1)—(3) в случае, когда $\sigma < 0$. Из теоремы Жиро вытекает, что если граница области и функции f, σ достаточно гладкие, то из единственности решения задачи (1)—(3) следует ее разрешимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* О метагармонических функциях.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1943, № 12, с. 105—174.
2. *Данилова И. А.* Внешние краевые задачи для уравнения Гельмгольца.— Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, **103**, с. 58—72.
3. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1950. 280 с.
4. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике. К., «Наук. думка», 1974. 259 с.

Луцкий филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 23.III 1976 г.

УДК 517.946.519.4/5

И. М. Ковальчик

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Для упрощения и вычисления континуальных интегралов большое значение имеют формулы преобразования этих интегралов при различных заменах переменной интегрирования (см. ссылки в [1, 2]). В данной работе