## ЛИТЕРАТУРА

1. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* О принципе максимума для эллиптико-параболического уравнения второго порядка.— Сиб. мат. журн., 1972, 13, № 4, с. 773—789.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1971. 736 с.
3. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 8, с. 1463—1477.
4. *Михайлов Л. Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.— Тр. АН ТаджССР, 1963, № 1, с. 1—183.
5. *Парасюк Л. С.* Умови розв'язності і граничні властивості першої крайової задачі для еліптичних рівнянь другого порядку з розривними коефіцієнтами.— Допов. АН УРСР, 1970, № 10, с. 889—893.
6. *Турсунов М.* Об одной многомерной краевой задаче.— Докл. АН ТаджССР, 1969, **11**, № 5, с. 3—9.



Черновицкий университет

Поступила в редколлегию 5.1 1976 г.



УДК 519.21



*Л. Н. Федоренко*


# СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u(t,\ x,\ \omega)}{\partial t} = \sum_{0<|k|\leqslant 2b} a_k(t)\, D_x^k u(t,\ x,\ \omega) + b(t)\, u(t,\ x,\ \omega)\, \frac{d\xi(t,\ \omega)}{dt}, \quad (1)$$

$$u(t,\ x,\ \omega)|_{t=0} = \varphi(x,\ \omega). \quad (2)$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) непрерывны при $t \geqslant 0$ и удовлетворяют условию равномерной параболичности в смысле И. Г. Петровского в каждом слое $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_n\}$; $\xi(t,\ \omega)$ — винеровский процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega,\ F,\ P)$ при $t \geqslant 0$, а $F_t$ — монотонно возрастающее семейство $\sigma$-алгебр множеств из $F$, согласованное с $\xi(t,\ \omega)$; $\varphi(x,\ \omega)$ — случайная функция, определенная на $E_n \times \Omega$, измеримая относительно $F$, почти непрерывная и ограниченная.

Согласно определению стохастического дифференциала задачу (1), (2) следует понимать как решение стохастического интегрального уравнения

$$u(t,\ x,\ \omega) = \varphi(x,\ \omega) + \int_0^t \sum_{0<|k|\leqslant 2b} a_k(\tau)\, D_x^k u(\tau,\ x,\ \omega)\, d\tau + \int_0^t b(\tau)\, u(\tau,\ x,\ \omega)\, d\xi(\tau,\ \omega).$$

Как показано в работе [1], решение задачи (1), (2) существует и единственно в классе случайных функций, определенных в слое $\Pi_{[0,T]} = [0,\ T] \times E_n \times \Omega$, измеримых при почти всех $\omega$ по $t$, $x$ относительно $\sigma$-алгебры борелевских множеств в $[0,\ T] \times E_n$, а по $\omega$ при почти всех $t$ и $x$ относительно $F_t$ и интегрируемых с квадратом по $t$, $x$, $\omega$ в слое $\Pi_{[0,T]}$. В доказательстве существенным являлось условие

$$\int_0^T b^2(\tau)\, d\tau < \infty.$$

Предположим, что условия теорем существования и единственности выполняются в каждом конечном слое $\Pi_{[0,T]}$ и фундаментальное решение $G(t, x)$, построенное для уравнения (1) при $b(t) \equiv 0$, удовлетворяет при всех $t > 0$ неравенствам

$$|D_x^m G(t, x)| \leqslant C_m \alpha(t)^{-n-|m|} \exp\left\{-c\left[\frac{|x|}{\alpha(t)}\right]^{\frac{2b}{2b-1}}\right\}, \tag{3}$$

где $C_m$, $c$ — положительные постоянные; $\alpha(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Если выполняется (3) и

$$\int_0^\infty b^2(\tau)\, d\tau < \infty, \tag{4}$$

то решение задачи (1), (2) устойчиво в среднем квадратичном [1]. Но даже в детерминированном случае устойчивость решения уравнения с частными производными в неограниченных областях еще не гарантирует его стабилизации [3].

**Определение 1**. Случайная функция $f(t, x, \omega)$, определенная в полупространстве $[0, \infty) \times E_n \times \Omega$, стабилизируется в среднем квадратичном к функции $\psi(x, \omega)$ при $t \to \infty$, если

$$E|f(t, x, \omega) - \psi(x, \omega)|^2_{t\to\infty} \to 0$$

равномерно в каждой конечной области пространства $E_n$. Здесь и далее $E$ обозначает операцию математического ожидания.

Обозначим через $R_e$ множество точек пространства $E_n$, удовлетворяющих неравенствам $\varepsilon_1 x_1 \geqslant 0$, $\varepsilon_2 x_2 \geqslant 0, \ldots, \varepsilon_n x_n \geqslant 0$, $e = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — фиксированный вектор, составляющие которого равны $+1$ или $-1$, а через $R_{ea}$ — параллелепипед ($\varepsilon_1 x_1 \leqslant a_1, \ldots, \varepsilon_n x_n \leqslant a_n$), $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $A = \prod_{i=1}^n a_i$.

**Определение 2**. Случайная функция $\varphi(x, \omega)$ имеет угловые среднеквадратичные предельные средние, если существует такая постоянная $l$, что

$$E\left|\frac{1}{A}\int_{R_{ea}} \varphi(x, \omega)\, dx - l\right|^2 \to 0, \tag{5}$$

когда $a_1, \ldots, a_n$ независимо друг от друга стремятся к бесконечности. При этом предел $l$ одинаков во всех $R_l$.

**Теорема 1**. Если начальная функция $\varphi(x, \omega)$ имеет угловые среднеквадратичные предельные средние $l$ и при всех $t > 0$ выполняются неравенства (3), (4), то решение задачи (1), (2) стабилизируется в среднем квадратичном к пределу

$$l \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\infty b^2(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty b(\tau)\, d\xi(\tau, \omega)\right\}.$$

Доказательство. Решение задачи (1), (2) имеет вид [1]

$$u(t, x, \omega) = \int_{E_n} G(t, x-y)\, \varphi(y, \omega)\, dy \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t b^2(\tau)\, d\tau + \int_0^t b(\tau)\, d\xi(\tau, \omega)\right\}. \tag{6}$$

Из выражений (4), (6) и свойств интеграла по винеровскому процессу и измеримости начальной функции относительно $\sigma$-алгебры $F_0$ следует соотношение

$$E\left|u(t, x, \omega) - l\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\infty b^2(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty b(\tau)\, d\xi(\tau, \omega)\right\}\right|^2 =$$

$$= E\left[\int_{E_n} G(t,\ x-y)\,\varphi(y,\ \omega)\,dy - l\right]^2 \exp\left\{\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\} +$$

$$+ 2lE\left[\int_{E_n} G(t,\ x-y)\,\varphi(y,\ \omega)\,dy - l\right] \exp\left\{\int_t^\infty b^2(\tau)\,d\tau\right\} +$$

$$+ l^2E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau + \int_0^t b(\tau)\,d\xi(\tau,\ \omega)\right\} -\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\infty b^2(\tau)\,d\tau + \int_0^\infty b(\tau)\,d\xi(\tau,\ \omega)\right\}\right]^2. \tag{7}$$

Заметим, что условий (3), (5) достаточно для стабилизации в среднем квадратичном к пределу $l$ решения задачи (1), (2) при $b(t) \equiv 0$ [2]. В силу этого и условия (4) первое и второе слагаемые в (7) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Преобразовывая последнее слагаемое, получаем

$$\lim_{t\to\infty} E\left[u(t,\ x,\ \omega) - l\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\infty b^2(\tau)\,d\tau + \int_0^\infty b(\tau)\,d\xi(\tau,\ \omega)\right\}\right]^2 =$$

$$= l^2 \lim_{t\to\infty} E\left[\exp\left\{-\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau + 2\int_0^t b(\tau)\,d\xi(\tau,\ \omega)\right\} - 2\exp\left\{-\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau +\right.\right.$$

$$\left. + 2\int_0^t b(\tau)\,d\xi(\tau,\ \omega) - \frac{1}{2}\int_t^\infty b^2(\tau)\,d\tau + \int_t^\infty b(\tau)\,d\xi(\tau,\ \omega)\right\} +$$

$$\left. + \exp\left\{-\int_0^\infty b^2(\tau)\,d\tau + 2\int_0^\infty b(\tau)\,d\xi(\tau,\ \omega)\right\}\right] = l^2 \lim_{t\to\infty}\left[\exp\left\{\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\} -\right.$$

$$\left. - 2\exp\left\{\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\} + \exp\left\{\int_0^\infty b^2(\tau)\,d\tau\right\}\right] = 0.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы при $l = 0$ получаем следствие.

**Следствие 1.** Если решение невозмущенного уравнения (1), т. е. при $b(t) \equiv 0$, стабилизируется в среднем квадратичном к нулю, то и решение возмущенного уравнения стабилизируется в среднем квадратичном к нулю, если имеет место условие (4).

Примером начальной функции, удовлетворяющей теореме 1, может служить функция одной переменной, имеющая конечный средний квадратический предел при $x \to \infty$. Но класс функций, удовлетворяющих определению 2, значительно шире и охватывает все правильно колеблющиеся функции.

**Следствие 2.** Если выполняются условия теоремы 1, то решение задачи Коши (1), (2) стабилизируется по вероятности к тому же пределу.

Обозначим через $v(t,\ x,\ \omega)$ решение задачи (1), (2) при $b(t) \equiv 0$, а за решением возмущенной задачи Коши сохраним прежнее обозначение $u(t, x,\ \omega)$.

**Теорема 2.** Если $E\,|\,v(t,\ x,\ \omega) - \psi(x,\ \omega)\,|^2 \to 0$ при $t \to \infty$, где $\psi(x,\ \omega)$ — случайная функция, определенная на $E_n \times \Omega$, суммируемая с квадратом по $\omega$, измеримая относительно $\sigma$-алгебры при почти всех $x \in E_n$, а $b(t)$ удовлетворяет условию (4), то

$$E\,|\,u(t,\ x,\ \omega) - \psi(x,\ \omega)\,|^2_{t\to\infty} \to 0$$

тогда и только тогда, когда тождество $\psi(x,\ \omega) \equiv 0$ почти неверное.

Доказательство. В силу (6), (4) имеем

$$E|u(t, x, \omega) - \psi(x, \omega)|^2 = E\left[\int_{E_n} G(t, x-y)\varphi(y, \omega)\,dy - \psi(x, \omega)\right]^2 \times$$
$$\times \exp\left\{\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\} + 2E\left[\int_{E_n} G(t, x-y)\varphi(y, \omega)\,dy - \psi(x, \omega)\right]\psi(x, \omega) \times$$
$$\times\left[\exp\left\{\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\} - 1\right] + E\psi^2(x, \omega)\left[\exp\left\{\int_0^t b^2(\tau)\,d\tau\right\} - 1\right].$$

Из условий теоремы и неравенства Гельдера следует, что первое и второе слагаемые стремятся к нулю при $t \to \infty$. Последнее слагаемое превращается в нуль только тогда, когда тождество $\psi(x, \omega) \equiv 0$ почти неверное. Теорема доказана.


ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоренко Л. Н.* Об устойчивости решений стохастических уравнений в частных производных.— В кн.: Распределенное управление процессами в сложных системах. К., 1973, с. 45—55.
2. *Федоренко Л. Н.* О стабилизации случайного решения задачи Коши для параболических систем.— В кн.: Математические модели сложных систем. К., 1974, с. 80—87.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М., «Наука», 1964. 315 с.



Черновицкий университет — Поступила в редколлегию 20.III 1976 г.



УДК 517.946



*И. В. Коробчук*


## О РАЗРЕШИМОСТИ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Пусть $S$ — достаточно гладкая замкнутая поверхность в $n$-мерном пространстве $R^n$; $D_l$ — область, ограниченная поверхностью $S$ и содержащая бесконечность; $D_i = R^n \setminus D_l$. Рассмотрим вопрос единственности в $D_l$ решения уравнения

$$\Delta u + \omega^2 u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе $S$ области $D_l$ условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u|_S = f \tag{2}$$

и условию излучения Зоммерфельда при $r \to \infty$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u = e^{i\omega r} o\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right), \quad \operatorname{Im}\omega \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\omega = \alpha + i\beta$; $\sigma(P)$, $f(P)$ — достаточно гладкие функции на $S$, причем $\operatorname{Im}\sigma(P) \equiv 0$.

**Теорема.** Если $\sigma(P) \in C_{[S]}$, то задача (1)—(3) имеет не более одного решения, когда в области $\overline{D}_l$ существуют непрерывные действительные функции $B_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$ с кусочно-непрерывными производными $\frac{\partial B_j}{\partial x_j}$, которые удовлетворяют условию

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^n \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n B_j^2 + \beta^2 > 0,\\ \sum_{j=1}^n B_j \cos(\widehat{\overline{n}, x_j}) - \sigma|_S \leqslant 0.\end{gathered} \tag{4}$$