Доказательство теоремы с учетом сделанного выше замечания проводится непосредственной проверкой того, что матрица $B = Q^{-1}JQ$ удовлетворяет равенству (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казимирский П. С.* Матричные многочлены и уравнения.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 23—31.
2. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення лінійного множника з матричного многочлена.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 11, с. 968—970.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
27.XII 1976 г.

УДК 512.8

А. И. Балинский, Ли Гюн-Ы

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ

В работе [2] развит новый алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух многочленов. Он основывается на использовании свойств матрицы — значения одного из многочленов на сопровождающей матрице другого. Однако ее нахождение осложняется необходимостью вычисления степеней соответствующей сопровождающей матрицы. В настоящей работе для построения алгоритма НОД используется дополнительная возможность симметризации сопровождающей матрицы. При этом основная матрица просто записывается через коэффициенты заданных многочленов.

Пусть имеются два многочлена

$$a(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$
$$b(\lambda) = b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\lambda + b_m \quad (b_0 \neq 0)$$

с комплексными коэффициентами, причем $n \geqslant m$. Обозначим через λ_1, λ_2, ..., λ_p все различные корни многочлена $a(\lambda)$, их кратности через ν_1, ν_2, ..., ν_p. Многочлену $a(\lambda)$ поставим в соответствие матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n/a_0 & -a_{n-1}/a_0 & -a_{n-2}/a_0 & \dots & -a_2/a_0 & -a_1/a_0 \end{Vmatrix},$$

$$W = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & \lambda_p & 1 & 0 & \dots \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \dots & \lambda_p^2 & 2\lambda_p & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & \binom{2}{n-1}\lambda_1^{n-3} & \dots & \lambda_p^{n-1} & (n-1)\lambda_p^{n-2} & \binom{2}{n-1}\lambda_p^{n-3} & \dots \end{Vmatrix}$$

(A — сопровождающая матрица, W — обобщенная матрица Вандермонда). Непосредственно проверяется справедливость следующего соотношения.

Лемма 1. $AW = WD$, где $D = \mathrm{diag}\,(D_1, D_2, \ldots, D_p)$ — блочно-диагональная матрица с $\nu_i \times \nu_i$-матрицами-блоками

$$D_i = \begin{vmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \lambda_i \end{vmatrix}.$$

Введем матрицу

$$S_a = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и сформулируем следующее утверждение [1].

Лемма 2. Матрица S_a симметризует слева каждую из матриц A^k ($k = 1, 2, \ldots$), т. е. $(S_aA^k)^t = S_aA^k$ (t — обозначение операции транспонирования). При этом

$$S_aA^k = \mathrm{diag}\,(A_k, A_{n-k}) \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

где

$$A_k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & \ldots & -a_n & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -a_n & \ldots & -a_{n-k+3} & -a_{n-k+2} \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_{n-k+2} & -a_{n-k+1} \end{vmatrix},$$

$$A_{n-k} = \begin{vmatrix} a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_{n-k-2} & a_{n-k-3} & \ldots & a_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $S_ab\,(A)$. Заметим, что ее выражение легко находить, если пользоваться леммой 2.

Теорема 1. Степень НОД многочленов $a\,(\lambda)$ и $b\,(\lambda)$ равна $n - \rho\,[S_ab(A)]$, где $\rho\,[S_ab\,(A)]$ — ранг матрицы $S_ab\,(A)$.

Доказательство. Перейдем от матрицы $S_ab\,(A)$ к конгруэнтной ей матрице $W^tS_ab\,(A)W$. Последнюю на основании леммы 1 представим в виде $W^tS_aWb\,(D)$, где $b\,(D) = \mathrm{diag}\,[b\,(D_1), b\,(D_2), \ldots, b\,(D_p)]$,

$$b\,(D_i) = \begin{vmatrix} b\,(\lambda_i) & \dfrac{b'\,(\lambda_i)}{1!} & \ldots & \dfrac{b^{(\nu_i-1)}\,(\lambda_i)}{(\nu_i-1)!} \\ 0 & b\,(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dfrac{b'\,(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdot & b\,(\lambda_i) \end{vmatrix}.$$

Учитывая при этом невырожденность матрицы S_a, получаем

$$\rho\,[S_ab\,(A)] = \rho\,[W^tS_ab\,(A)\,W] = \sum_{i=1}^{p} \rho\,[b\,(D_i)].$$

Если λ_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) являются корнями многочлена $b\,(\lambda)$ кратностей μ_i ($0 \leqslant \mu_i \leqslant \nu_i$), то степень НОД $a\,(\lambda)$ и $b\,(\lambda)$ равна $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i$ и, очевидно,

$\rho\,[b\,(D_i)] = \nu_i - \mu_i$. Поэтому $\rho\,[S_a b\,(A)] = n - \sum_{i=1}^{p} \mu_i$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть $d\,(\lambda) = \lambda^k + d_1\lambda^{k-1} + \ldots + d_{k-1}\lambda + d_k$ — НОД многочленов $a\,(\lambda)$ и $b\,(\lambda)$, $0 \leqslant \mu_i \leqslant \nu_i$. Тогда последние $n-k$ столбцов матрицы $S_a b\,(A)$ линейно независимы. Если $\tau_i = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{ij}\tau_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, где τ_i — i-й столбец матрицы $S_a b\,(A)$, то $d_l = \alpha_{k+1-l,k+1}$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$.

Доказательство. Имеем $b\,(\lambda) = c\,(\lambda)\,d\,(\lambda)$, причем многочлены $c\,(\lambda)$ и $a\,(\lambda)$ взаимно просты. Поэтому $S_a b\,(A) = S_a c\,(A)\,d\,(A)$, где $S_a c\,(A)$ — невырожденная матрица, а $\rho\,[d\,(A)] = n - k$ на основании теоремы 1. Нетрудно убедиться, что первые $n-k$ строк матрицы $d\,(A)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} d_k & d_{k-1} & d_{k-2} & \ldots & d_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & d_k & d_{k-1} & \ldots & d_2 & d_1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & d_k & \ldots & d_3 & d_2 & d_1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что последние $n-k$ столбцов матрицы $d\,(A)$ и, следовательно, матрицы $S_a b\,(A)$ являются линейно независимыми. Если $\delta_i = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{ij}\delta_j\,(i = 1, 2, \ldots, k)$, где δ_i — i-й столбец матрицы $d\,(A)$, то с учетом выражения $\tau_i = S_a c\,(A)\,\delta_i$ получаем, что

$$\tau_i = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{ij}\tau_j \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

с теми же коэффициентами α_{ij}. Анализ первой строки матрицы $d\,(A)$ приводит к соотношениям $\alpha_{k+1-l,k+1} = d_l$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения. Канд. дис. Львов, 1972. 113 с.
2. *Barnett S.* Greatest common divisor of two polinomials.— Linear Algebra and Its Appl., 1970, N 3, p. 7—9.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
10.X 1976 г.

УДК 517.946

И. Д. Пукальский

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследованию свойств решений основных задач математической физики для параболических и эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами посвящены работы [2—6]. В статье [3] построены фундаментальные решения и изучены краевые задачи для параболических систем при минимальной гладкости коэффициентов. В настоящей работе устанавливаются экстремальные свойства решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка с разрывами более высокого порядка, чем в работе [3].