УДК 512.8

П. С. Казимирский, В. Р. Зелиско

К ВЫДЕЛЕНИЮ ЛИНЕЙНОГО МНОЖИТЕЛЯ ИЗ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

Рассмотрим матричный многочлен

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m, \quad \deg \det A(x) > 0, \tag{1}$$

где A_i ($i = 0, 1, \ldots, m$) — квадратные матрицы n-го порядка с элементами из поля C комплексных чисел, строки которых будем при необходимости рассматривать как векторы n-мерного комплексного линейного пространства L. Будем говорить, что векторы $q_1, q_2, \ldots, q_k \in L$, $q_1 \neq 0$, образуют жорданову цепь длины k для матричного многочлена (1) с корнем α характеристического многочлена $\det A(x)$, если имеют место равенства

$$q_j A(\alpha) + \frac{1}{1!} q_{j-1} A'(\alpha) + \frac{1}{2!} q_{j-2} A''(\alpha) + \cdots + \frac{1}{m!} A^{(m)}(\alpha) = 0, \tag{2}$$

$$j = 1, 2, \ldots, k, \quad q_0 = q_{-1} = \cdots = q_{-m} = 0.$$

Дальше будем отождествлять понятие матричного многочлена и полиномиальной матрицы, элементами которой являются соответствующие многочлены из $C[x]$.

Теорема 1. Для того чтобы для полиномиальной матрицы $A(x)$ существовала неособенная числовая матрица S такая, что

$$SA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k x - B \end{Vmatrix} C(x), \quad k \leqslant n, \tag{3}$$

где E_{n-k} и E_k — единичные матрицы соответственно порядков $n-k$ и k, причем

$$\det(E_k x - B) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_r)^{k_r}, \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = k, \tag{4}$$

необходимо и достаточно существование системы k линейно независимых векторов из L, образующих жордановы цепи для $A(x)$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ характеристического многочлена $\det A(x)$.

Доказательство необходимости. Пусть существует неособенная числовая матрица S такая, что имеет место равенство (3). Для матрицы B существует неособенная числовая матрица Q, что $QBQ^{-1} = J$, где

$$J = J^{(1)} \oplus \cdots \oplus J^{(r)}, \quad J^{(i)} = J^{(i)}_{l_1} \oplus \cdots \oplus J^{(i)}_{l_{d_i}} \quad (i = 1, \ldots, r),$$

причем

$$J^{(i)}_{l_p} = \begin{Vmatrix} \alpha_i & & & 0 \\ 1 & \alpha_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \alpha_i \end{Vmatrix}.$$

Здесь $J^{(i)}_{l_p}$ — нижняя жорданова клетка порядка l_p, где $p = 1, \ldots, d_i$, $d_i = \operatorname{def}(E_k \alpha_i - B)$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{d_i} l_i = k_i$.

В соответствии с этим получим $E_k\alpha_i - J = \bar{J}^{(1)} \oplus \ldots \oplus \bar{J}^{(r)}$, где $\bar{J}^{(t)} = \bar{J}^{(t)}_{l_1} \oplus \ldots \oplus \bar{J}^{(t)}_{l_{d_t}}$ $(t = 1, \ldots, m)$, причем

$$\bar{J}^{(t)}_{l_p} = \begin{Vmatrix} \alpha_i - \alpha_t & & & 0 \\ -1 & \alpha_i - \alpha_t & \cdot & \\ 0 & & \cdot & \\ & & -1 & \alpha_i - \alpha_t \end{Vmatrix},$$

$p = 1, \ldots, d_t$. При $t = i$ получим $\bar{J}^{(i)} = \bar{J}^{(i)}_{l_1} \oplus \cdots \oplus \bar{J}^{(i)}_{l_{d_i}}$, где

$$\bar{J}^{(i)}_{l_p} = \begin{Vmatrix} 0 & & 0 \\ -1 & 0 & \\ & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Обозначим строки матрицы Q через q_j, где $j = 1, 2, \ldots, k_1, k_1 + 1, \ldots, k_2, \ldots, k_{r-1} + 1, \ldots, k_r$. Тогда $q_j (E_k\alpha_i - B) = q_j Q^{-1} (E_k\alpha_i - J) \times Q = \| \overbrace{0 \ldots 0 \ 1}^{j} \ 0 \ldots 0 \| (E_k\alpha_i - J) Q = \| \overbrace{0 \ldots 0 \ -1}^{j-1} \ 0 \ldots 0 \| Q = -q_{j-1}$, $k_1 + \cdots + k_{i-1} < j < k_1 + \cdots + k_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r$, $k_0 = 0$.

Дополним все k строк матрицы Q слева $n - k$ нулями. Получим систему k линейно независимых векторов $u_1, \ldots, u_k$ пространства L, для которых выполняется равенство

$$u_j \begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k\alpha_i - B \end{Vmatrix} = -u_{j-1}$$

$$(k_1 + \cdots + k_{i-1} < j < k_1 + \cdots + k_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, r, \ u_0 = 0).$$

Покажем, что система k линейно независимых векторов $u_1 S, \ldots, u_k S$ (S — неособенная матрица) образует искомые жордановые цепи, т. е. удовлетворяет равенствам (2):

$$(u_j S) A(\alpha_i) + \frac{1}{1!}(u_{j-1} S) A'(\alpha_i) + \frac{1}{2!}(u_{j-2} S) A''(\alpha_i) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!}(u_{j-m+1} S) A^{(m-1)}(\alpha_i) + \frac{1}{m!}(u_{j-m} S) A^{(m)}(\alpha_i) =$$

$$= u_j [SA(\alpha_i)] + \frac{1}{1!} u_{j-1} [SA(\alpha_i)]' + \frac{1}{2!} u_{j-2} [SA(\alpha_i)]'' + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!} u_{j-m+1} [SA(\alpha_i)]^{(m-1)} + \frac{1}{m!} u_{j-m} [SA(\alpha_i)]^{(m)} =$$

$$= u_j \begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k\alpha_i - B \end{Vmatrix} C(\alpha_i) + \frac{1}{1!} u_{j-1} \left[\begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k\alpha_i - B \end{Vmatrix} C'(\alpha_i) + \right.$$

$$\left. + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_k \end{Vmatrix} C(\alpha_i) \right] + \frac{1}{2!} u_{j-2} \left[\begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k\alpha_i - B \end{Vmatrix} C''(\alpha_i) + \right.$$

$$\left. + 2 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_k \end{Vmatrix} C'(\alpha_i) \right] + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} u_{j-m+1} \left[\begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k\alpha_i - B \end{Vmatrix} C^{(m-1)}(\alpha_i) + \right.$$

$$\left. + (m-1) \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_k \end{Vmatrix} C^{(m-2)}(\alpha_i) \right] + \frac{1}{m!} u_{j-m} m \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_k \end{Vmatrix} C^{(m-1)}(\alpha_i) =$$

$$= -u_{j-1} C(\alpha_i) - u_{j-2} C'(\alpha_i) + u_{j-1} C(\alpha_i) - \frac{1}{2!} u_{j-3} C''(\alpha_i) +$$

$$+ u_{j-2} C'(\alpha_i) + \cdots + \left[-\frac{1}{(m-1)!} u_{j-m} C^{(m-1)}(\alpha_i) \right] +$$

$$+ \frac{1}{(m-2)!} u_{j-m+1} C^{(m-2)}(\alpha_i) + \frac{1}{(m-1)!} u_{j-m} C^{(m-1)}(\alpha_i) = 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует система $k \leqslant n$ линейно независимых векторов $u_1, \ldots, u_k \in L$, образующих жордановые цепи для $A(x)$ с корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ характеристического многочлена $\det A(x)$. Тогда существует неособенная числовая матрица S такая, что

$$u_i S^{-1} = \| \overbrace{0 \ \ldots \ 0}^{n-k} u'_{i1} \ldots u'_{ik} \| \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{5}$$

Обозначим через Q неособенную числовую матрицу, образованную последними k элементами векторов $u_i S^{-1}$ $(i = 1, \ldots, k)$, т. е. $Q = \| u'_{ij} \|_1^k$. Построим матрицу $Q^{-1}JQ$, где $J = J^{(1)} \oplus \ldots \oplus J^{(r)}$, $J^{(i)} = J^{(i)}_{l_1} \oplus \ldots \oplus J^{(i)}_{l_s}$. Числа $l_1, \ldots, l_s$ — длины жордановых цепей для $A(x)$ с корнем α_i,

$$J^{(i)}_{l_j} = \begin{Vmatrix} \alpha_i & & & 0 \\ 1 & \alpha_i & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & 1 & \alpha_i \end{Vmatrix}.$$

Разделим матрицу $SA(x)$ слева на матрицу

$$\begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k x - Q^{-1}JQ \end{Vmatrix}$$

с левым остатком R:

$$SA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k x - Q^{-1}JQ \end{Vmatrix} C(x) + R \tag{6}$$

так, что первые $n - k$ строк матриц $SA(x)$ и $C(x)$ совпадают, т. е. первые $n - k$ строк матрицы R равны нулю. Очевидно, R — числовая матрица.

Для векторов $u_1, \ldots, u_k$ справедливы равенства (2), т. е.

$$u_j A(\alpha_i) + \frac{1}{1!} u_{j-1} A'(\alpha_i) + \frac{1}{2!} u_{j-2} A''(\alpha_i) + \cdots + \frac{1}{m!} u_{j-m} A^{(m)}(\alpha_i) = 0.$$

Отсюда

$$[u_j S^{-1}][SA(\alpha_i)] + \frac{1}{1!}[u_{j-1}S^{-1}][SA(\alpha_i)]' + \frac{1}{2!}[u_{j-1}S^{-1}] \times$$
$$\times [SA(\alpha_i)]'' + \cdots + \frac{1}{m!}[u_{j-m}S^{-1}][SA(\alpha_i)]^{(m)} = 0.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для матрицы $SA(x)$ и ее производных согласно (6), получаем

$$u_j S^{-1} \begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k\alpha_i - Q^{-1}JQ \end{Vmatrix} C(\alpha_i) + u_j S^{-1} R +$$
$$+ \frac{u_{j-1}}{1!} S^{-1} \left[\begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k\alpha_i - Q^{-1}JQ \end{Vmatrix} C'(\alpha_i) + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_k \end{Vmatrix} C(\alpha_i) \right] +$$
$$+ \frac{u_{j-2}}{2!} S^{-1} \left[\begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k\alpha_i - Q^{-1}JQ \end{Vmatrix} C''(\alpha_i) + 2 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_k \end{Vmatrix} C'(\alpha_i) \right] +$$
$$+ \cdots + \frac{u_{j-m}}{m!} m \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_k \end{Vmatrix} C^{(m-1)}(\alpha_i) = 0.$$

Учитывая теперь то, что векторы $u_j S^{-1}$ имеют вид (5), а поэтому удовлетворяют равенствам (4), где $B = Q^{-1}JQ$, можно аналогично доказательству необходимости проверить, что в последнем равенстве все слагаемые, кроме второго, дают в сумме нуль. Поэтому $U_j S^{-1} R = 0$. Это равенство верно для всех $j = 1, 2, \ldots, k$, поэтому в силу линейной независимости строк u_j последние k строк матрицы R нулевые. Следовательно, $R = 0$ и имеет место равенство (3). Теорема доказана.

Как следствие из теоремы 1 при $k = n$ получим следующую теорему, доказанную авторами ранее [2].

Теорема 2. Для того чтобы из матричного многочлена $A(x)$ выделялся унитальный линейный множитель, т. е.

$$A(x) = (Ex - B)\,C(x), \tag{7}$$

где $\det(Ex - B) = (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_r)^{k_r}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала система n линейно независимых векторов из L, образующих жордановые цепи для $A(x)$ с корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ характеристического многочлена $\det A(x)$.

Укажем теперь способ конструктивного построения используемых в теоремах 1 и 2 жордановых цепей и дадим условия выделения из матричного многочлена линейного множителя.

Обозначим через $A_t(x)$ полиномиальную матрицу

$$A_t(x) = A_*(x)\,\| E,\ Ex,\ \ldots,\ Ex^t \|, \tag{8}$$

где E — единичная матрица порядка n, а $A_*(x)$ — взаимная матрица к матрице $A(x)$. Пусть $\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_i)^{k_i}$ — некоторый делитель характеристического многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ полиномиальной матрицы $A(x)$. Поставим в соответствие матрице $A(x)$ числовую матрицу вида

$$N_{A_t(x)}[\alpha_1^{(l_1)}, \ldots, \alpha_i^{(l_i)}] = \begin{Vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_i \end{Vmatrix}, \quad H_j = \begin{Vmatrix} A_t(\alpha_j) \\ A_t'(\alpha_j) \\ \vdots \\ A_t^{(l_j-1)}(\alpha_j) \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Здесь $A_t^{(p)}(x)$ — производная порядка p от матрицы $A_t(x)$, $l_j \geqslant k_j$ ($j = 1, 2, \ldots, i$).

Замечание. В случае $l_j = k_j$ матрица (9) совпадает с матрицей, соответствующей множеству корней многочлена $\varphi(x)$, т. е. с $M_{A_t(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$, введенной ранее в работе [1]. Все же матрица (9) зависит от чисел $l_1, \ldots, l_i$, в то время как $M_{A_t(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$ однозначно определяется системой корней многочлена $\varphi(x)$.

Лемма. Если для некоторого $s \geqslant 0$ p-я строка матрицы $A_*^{(s)}(\alpha)$ отлична от нуля ($s = 0, 1, \ldots, i-1$), то p-е строки подматриц

$$\frac{1}{s!}A_*^{(s)}(\alpha),\ \frac{1}{(s+1)!}A_*^{(s+1)}(\alpha),\ \ldots,\ \frac{1}{(i-1)!}A_*^{(i-1)}(\alpha)$$

матрицы

$$\left(E \oplus \frac{1}{1!}E \oplus \frac{1}{2!}E \oplus \cdots \oplus \frac{1}{(i-1)!}E\right) N_{A_*(x)}[\alpha^{(i)}]$$

образуют жордановые цепи для матричного многочлена $A(x)$ с i-кратным корнем α характеристического многочлена $\Delta(x)$.

Доказательство. Продифференцируем соотношение $A_*(x) \times A(x) = E\Delta(x)$ $i-1$ раз по x:

$$A_*'(x)\,A(x) + A_*(x)\,A'(x) = E\Delta'(x)$$

$$A_*''(x)\,A(x) + 2A_*'(x)\,A'(x) + A_*(x)\,A''(x) = E\Delta''(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_*^{(i-1)}(x)\ A(x) + \binom{i-1}{1}A_*^{(i-2)}(x) + \cdots + \binom{i-1}{m-1}A_*^{(i-m)}(x)\,A^{(m-1)}(x) +$$

$$+ \binom{i-1}{m}A_*^{(i-m-1)}(x)\,A^{(m)}(x) = E\Delta^{(i-1)}(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant mn - m).$$

Поскольку α — i-кратный корень многочлена $\Delta(x)$, то правые части последних соотношений равны нулю при $x = \alpha$. Пусть $A_*^{(s)}(\alpha) \neq 0$ и

$A_*^{(t)}(\alpha) = 0$ при $t < s$. Тогда записанные выше соотношения можно записать в матричной форме, которая после проведения элементарных преобразований примет вид

$$G(\alpha)\begin{Vmatrix} A(\alpha) \\ \frac{1}{1!}A'(\alpha) \\ \frac{1}{2!}A''(\alpha) \\ \cdots\cdots \\ \frac{1}{m!}A^{(m)}(\alpha) \end{Vmatrix} = 0, \qquad (10)$$

где $G(\alpha) = \left(E \oplus \frac{1}{1!}E \oplus \frac{1}{2!}E \oplus \cdots \oplus \frac{1}{(i-1)!}E\right)F(\alpha)$, а

$$F(\alpha) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{s!}A_*^{(s)}(\alpha) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{(s+1)!}A_*^{(s+1)}(\alpha) & \frac{1}{s!}A_*^{(s)}(\alpha) & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{(s+2)!}A_*^{(s+2)}(\alpha) & \frac{1}{(s+1)!}A_*^{(s+1)}(\alpha) & \frac{1}{s!}A_*^{(s)}(\alpha) & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(i-1)!}A_*^{(i-1)}(\alpha) & \frac{1}{(i-2)!}A_*^{(i-2)}(\alpha) & \frac{1}{(i-3)!}A_*^{(i-3)}(\alpha) & \ldots & \frac{1}{(i-m-1)!}A_*^{(i-m-1)}(\alpha) \end{Vmatrix}. \qquad (11)$$

Из равенства (10), учитывая вид матрицы (11) и то, что $E \oplus \frac{1}{1!}E \oplus \oplus \frac{1}{2!}E \oplus \cdots \oplus \frac{1}{(i-1)!}E$ — обратимая матрица, видим, что p-е строки подматриц $\frac{1}{s!}A_*^{(s)}(\alpha)$, $\frac{1}{(s+1)!}A_*^{(s+1)}(\alpha)$, $\ldots$, $\frac{1}{(i-1)!}A_*^{i-1}(\alpha)$ матрицы $\left(E \oplus \oplus \frac{1}{1!}E \oplus \frac{1}{2!}E \oplus \cdots \oplus \frac{1}{(i-1)!}E\right)N_{A_*(x)}[\alpha^{(i)}]$ образуют жордановые цепи для матричного многочлена $A(x)$ с корнем α характеристического многочлена $\Delta(x)$.

Теорема 3. Пусть $\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_r)^{k_r}$ — делитель степени n характеристического многочлена $\Delta(x)$ матричного многочлена $A(x)$ и l_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) — наименьшее целое неотрицательное число, для которого

$$\operatorname{rang} N_{A_*(x)}[\alpha_i^{(l_i)}] = \operatorname{rang} N_{A_1(x)}[\alpha_i^{(l_i)}] \geqslant k_i. \qquad (12)$$

Тогда, если

$$\operatorname{rang} N_{A_*(x)}[\alpha_1^{(l_1)}, \alpha_2^{(l_2)}, \ldots, \alpha_r^{(l_r)}] = n, \qquad (13)$$

то

$$A(x) = (Ex - B)C(x),$$

причем $\det(Ex - B) = \varphi(x)$.

Доказательство. Согласно теореме 2 и доказанной лемме достаточно показать, что в условиях (12), (13) теоремы существует система n линейно независимых векторов, образованных p-ми строками соответствующих подматриц матрицы $N_{A_*(x)}[\alpha_1^{(l_1)}, \ldots, \alpha_r^{(l_r)}]$.

Запишем условие (12), заметив, что $A_*^{(s_i)}(\alpha_i)$ — первая отличная от нуля матрица, полученная в результате дифференцирования $A_*(x)$ и подстановки $x = \alpha_i$:

$$\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} A_*^{(s_i)}(\alpha_i) \\ A_*^{(s_i+1)}(\alpha_i) \\ \vdots \\ A_*^{(l_i-1)}(\alpha_i) \end{matrix}\right\| = \operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} A_*^{(s_i)}(\alpha_i) & A_*^{(s_i)}(\alpha_i)\alpha_i \\ A_*^{(s_i+1)}(\alpha_i) & A_*^{(s_i+1)}(\alpha_i)\alpha_i + A_*^{(s_i)}(\alpha_i) \\ \dots & \dots \\ A_*^{(l_i-1)}(\alpha_i) & A_*^{(l_i-1)}(\alpha_i)\alpha_i + A_*^{(l_i-2)}(\alpha_i) \end{matrix}\right\| \geqslant k_i. \quad (14)$$

Умножим матрицы $N_{A_*(x)}[\alpha_i^{(l_i)}]$, $N_{A_1(x)}[\alpha_i^{(l_i)}]$ на неособенную матрицу $E \oplus \oplus \frac{1}{1!}E \oplus \frac{1}{2!}E \oplus \cdots \oplus \frac{1}{(l_i-1)!}E$ и, кроме этого, в $N_{A_1(x)}[\alpha_i^{(l_i)}]$ умножим первые n столбцов на $-\alpha_i$ и прибавим к соответствующим им другим n столбцам. Поскольку такие преобразования не меняют рангов матриц, то условие (12) эквивалентно такому:

$$\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} \frac{A_*^{(s_i)}(\alpha_i)}{s_i!} \\ \frac{A_*^{(s_i+1)}(\alpha_i)}{(s_i+1)!} \\ \cdots \\ \frac{A_*^{(l_i-1)}(\alpha_i)}{(l_i-1)!} \end{matrix}\right\| = \operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} \frac{A_*^{(s_i)}(\alpha_i)}{s_i!} & 0 \\ \frac{A_*^{(s_i+1)}(\alpha_i)}{(s_i+1)!} & \frac{A_*^{(s_i)}(\alpha_i)}{s_i!} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{A_*^{(l_i-1)}(\alpha_i)}{(l_i-1)!} & \frac{A_*^{(l_i-2)}(\alpha_i)}{(l_i-2)!} \end{matrix}\right\| \geqslant k_i. \quad (15)$$

Первая отличная от нуля строка матрицы $\frac{1}{s_i!}A_*^{(s_i)}(\alpha_i)$ будет первым вектором искомой жордановой цепи для $A(x)$ с корнем α_i. Принимая во внимание вид правой части равенства (15), получаем, что

$$\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} \frac{1}{s_i!}A_*^{(s_i)}(\alpha_i) \\ \frac{1}{(s_i+1)!}A_*^{(s_i+1)}(\alpha_i) \end{matrix}\right\| \geqslant 2.$$

Тогда существует строка матрицы $\frac{1}{(s_i+1)!}A_*^{(s_i+1)}(\alpha_i)$, линейно независимая с выбранной ранее строкой, которая либо образует вместе с первой жордановую цепь длины два, либо начинает новую жордановую цепь. Продолжая рассуждения таким образом и учитывая условие (15), находим k_i линейно независимых строк, образующих жордановые цепи для $A(x)$ с корнем α_i характеристического многочлена $\Delta(x)$.

Аналогично можно найти, учитывая условие (13), все $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ линейно независимых векторов, образующих жордановые цепи для $A(x)$ с корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Теорема 3 доказана.

Замечание. В процессе доказательства теоремы 3 мы получили метод построения матрицы B линейного множителя $Ex - B$, а именно: $B = Q^{-1}JQ$, где Q — матрица, составленная из линейно независимых строк матрицы

$$\left[\frac{E}{s_1!} \oplus \cdots \oplus \frac{E}{(l_1-1)!} \oplus \cdots \oplus \frac{E}{s_r!} \oplus \cdots \oplus \frac{E}{(l_r-1)!}\right] \times$$
$$\times N_{A_*(x)}[\alpha_1^{(l_1)}, \dots, \alpha_r^{(l_r)}],$$

образующих построенные выше жордановые цепи; $J = J^{(1)} \oplus \dots \oplus J^{(r)}$, где $J^{(i)} = J_{t_1^{(i)}} \oplus \dots \oplus J_{t_s^{(i)}}$ $(i = 1, \dots, r)$.

Здесь $t_j^{(i)}$ $(j = 1, \dots, s)$ — длины жордановых цепей для $A(x)$ с корнем α_i, а $J_{t_j^{(i)}}$ — нижняя жордановая клетка порядка $t_j^{(i)}$.

Теорема 4. В условиях теоремы 3 матрица B может быть найдена как единственное решение матричного уравнения

$$N_{A_*(x)}[\alpha_1^{(l_1)}, \dots, \alpha_r^{(l_r)}]X = N_{A_*(x)\cdot x}[\alpha_1^{(l_1)}, \dots, \alpha_r^{(l_r)}]. \quad (16)$$

Доказательство теоремы с учетом сделанного выше замечания проводится непосредственной проверкой того, что матрица $B = Q^{-1}JQ$ удовлетворяет равенству (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казимирский П. С.* Матричные многочлены и уравнения.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 23—31.
2. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення лінійного множника з матричного многочлена.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 11, с. 968—970.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 27.XII 1976 г.

УДК 512.8

А. И. Балинский, Ли Гюн-Ы

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ

В работе [2] развит новый алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух многочленов. Он основывается на использовании свойств матрицы — значения одного из многочленов на сопровождающей матрице другого. Однако ее нахождение осложняется необходимостью вычисления степеней соответствующей сопровождающей матрицы. В настоящей работе для построения алгоритма НОД используется дополнительная возможность симметризации сопровождающей матрицы. При этом основная матрица просто записывается через коэффициенты заданных многочленов.

Пусть имеются два многочлена

$$a(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$
$$b(\lambda) = b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\lambda + b_m \quad (b_0 \neq 0)$$

с комплексными коэффициентами, причем $n \geqslant m$. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ все различные корни многочлена $a(\lambda)$, их кратности через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$. Многочлену $a(\lambda)$ поставим в соответствие матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n/a_0 & -a_{n-1}/a_0 & -a_{n-2}/a_0 & \ldots & -a_2/a_0 & -a_1/a_0 \end{vmatrix},$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & \lambda_p & 1 & 0 & \ldots \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \ldots & \lambda_p^2 & 2\lambda_p & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & \binom{2}{n-1}\lambda_1^{n-3} & \ldots & \lambda_p^{n-1} & (n-1)\lambda_p^{n-2} & \binom{2}{n-1}\lambda_p^{n-3} & \ldots \end{vmatrix}$$

(A — сопровождающая матрица, W — обобщенная матрица Вандермонда). Непосредственно проверяется справедливость следующего соотношения.