УДК 512.8

П. С. Казимирский, В. М. Петричкович

РАЗЛОЖИМОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Рассмотрим разложимость на линейные множители полиномиальных матриц над кольцом многочленов с коэффициентами из алгебраически замкнутого поля характеристики нуль и, в частности, докажем, что регулярная полиномиальная матрица, характеристические числа которой имеют кратности не больше двух, разложима в произведение линейных регулярных множителей. Этот результат обобщает известный ранее факт [1, 5] о возможности разложения на линейные регулярные множители полиномиальной матрицы, не имеющей кратных характеристических чисел.

Пусть $A(x) = \| a_{ij}(x) \|_1^{r,n}$ — $r \times n$ $(r \leqslant n)$-матрица степени m, $d_r(x) = (x-\alpha_1)^{l_1} \ldots (x-\alpha_s)^{l_s}$ — наибольший общий делитель (НОД) миноров порядка r этой матрицы, t_i — число элементарных делителей матрицы $A(x)$, соответствующих корню α_i, т. е. $\operatorname{rang} A(\alpha_i) = r - t_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Лемма 1. Для матрицы $A(x)$ существует такая неособенная числовая матрица Q, что

$$QA(x) = \left\| \begin{matrix} A_k(x) \\ A_{r-k}(x) \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

где $A_k(x) = \| (x-\alpha_i) a'_{ij}(x) \|_1^{k,n}$ (среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ могут быть и совпадающие), причем

$$\operatorname{rang} A_k(\alpha_i) = k - t_i \quad (i = 1, \ldots, s) \tag{2}$$

и

$$k \geqslant \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{s} t_i. \tag{3}$$

Доказательство. Для корня α_1 многочлена $d_r(x)$ существует такая неособенная числовая матрица Q_1, что

$$Q_1 A(x) = \left\| \begin{matrix} (x-\alpha_1) a'_{11}(x) \ \ldots \ (x-\alpha_1) a'_{1n}(x) \\ A_{r-1}(x) \end{matrix} \right\|.$$

Пусть таким образом уже получено

$$Q_p \ldots Q_1 A(x) = \left\| \begin{matrix} A_p(x) \\ A_{r-p}(x) \end{matrix} \right\|,$$

где $A_p(x) = \| (x-\alpha_i) a'_{ij}(x) \|_1^{p,n}$, и для некоторого корня α_{p+1} (не обязательно отличного от $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$) многочлена $d_r(x)$ $\operatorname{rang} A_p(\alpha_{p+1}) = q > p - t_{p+1}$. Тогда в матрице $A_p(\alpha_{p+1})$ есть q линейно независимых строк. Система $r - p + q$ строк, составленная из $r - p$ строк матрицы $A_{r-p}(\alpha_{p+1})$ и q вышеупомянутых строк матрицы $A_p(\alpha_{p+1})$, линейно зависима. Действительно, в противном случае получили бы, что $\operatorname{rang} A(\alpha_{p+1}) > r - t_{p+1}$, что невозможно. Поэтому существует неособенная числовая матрица Q_{p+1} такая, что

$$Q_{p+1}Q_p \, \dots \, Q_1 A(x) = \begin{Vmatrix} A_{p+1}(x) \\ A_{r-p-1}(x) \end{Vmatrix},$$

где $A_{p+1}(x) = \| (x-\alpha_i) \; a'_{ij}(x) \|_1^{p+1,n}$. Так поступая шаг за шагом, получаем (1), (2).

Пусть теперь $d_k(x)$ — НОД миноров k-го порядка матрицы $A_k(x)$. Из (2) следует, что число элементарных делителей матрицы $A_k(x)$ равно $\sum_{i=1}^{s} t_i$. Поэтому $\deg d_k \geqslant \sum_{i=1}^{s} t_i$. Поскольку степень матрицы $A(x)$ не превышает m, то $\deg d_k \leqslant km$. Отсюда и вытекает (3). Лемма доказана.

Будем говорить, что из матрицы $A(x)$ можно выделить регулярный множитель порядка k $(k \leqslant r)$, если существует неособенная числовая матрица Q такая, что

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} B_k(x) & 0 \\ 0 & E_{r-k} \end{Vmatrix} \tilde{A}(x),$$

где $B_k(x)$ — регулярная матрица порядка k; E_{r-k} — единичная матрица порядка $r-k$. Из предыдущей леммы вытекает такая лемма.

Лемма 2. Пусть $A(x)$ — полиномиальная $r \times n$ $(r \leqslant n)$-матрица степени m, s — число ее элементарных делителей. Тогда из матрицы $A(x)$ выделяется линейный регулярный множитель простой структуры (элементарные делители которого линейны) порядка $k \geqslant \frac{s}{m}$. Поскольку степени элементарных делителей сомножителей не превышают степеней соответствующих элементарных делителей произведения матриц [6], то из леммы 2, применяя индукцию, получаем результат работ [1, 4].

Следствие. Регулярная полиномиальная матрица простой структуры разложима в произведение линейных регулярных множителей.

Теперь рассмотрим матрицы

$$A_k(x) = \| (x-\alpha_i) \, a_{ij}(x) \|_1^{k,n} \quad \text{и} \quad A'_k(x) = \| a_{ij}(x) \|_1^{k,n}.$$

Пусть $d'_k(x)$ — НОД миноров k-го порядка матрицы $A'_k(x)$. Систему корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (среди которых могут быть и совпадающие) обозначим через K.

Если для корня β_l многочлена $d'_k(x)$ существует такая неособенная числовая матрица Q, что

$$QA_k(x) = \begin{Vmatrix} & & * & & \\ (x-\beta_l)\, a'_{j1}(x) & \dots & \dots & \dots & (x-\beta_l)\, a'_{jn}(x) \\ & & * & & \end{Vmatrix} =$$

$$= \operatorname{diag}(1, \, \dots, \, 1, \; x-\beta_l, \; 1, \, \dots, \, 1) \, \tilde{A}_k(x)$$

($*$ — строки матрицы $A_k(x)$, оставшиеся без изменения), то будем говорить, что корень β_l можно выделить в матрице $A_k(x)$ из j-й строки вместо корня $\alpha_j \in K$.

Лемма 3. Каждый корень β_l многочлена $d'_k(x)$ можно выделить в матрице $A_k(x)$ вместо некоторого корня $\alpha_j \in K$, причем если корень β_l можно выделить только вместо корней $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_p}$ $(\beta_l \neq \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_p})$, то $j_1, \dots$ $\dots, j_p$-я строки матрицы $A_k(\beta_l)$ линейно зависимы.

Доказательство очевидно.

Теорема 1. Пусть $A(x) = \| a_{ij}(x) \|_1^{r,n}$ — полиномиальная матрица степени m, $d_r(x) = (x-\alpha_1)^{l_1} \dots (x-\alpha_s)^{l_s}$ — НОД миноров порядка r матрицы $A(x)$, причем $\deg d_r = d$. Если кратности корней многочлена $d_r(x)$ не превышают двух, то из матрицы $A(x)$ выделяется линейный регулярный множитель порядка $p \geqslant \frac{d}{m}$.

Доказательство. На основании леммы 1 матрицу $A(x)$ представим в виде

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} B_k(x) & 0 \\ 0 & E_{r-k} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A'_k(x) \\ A_{r-k}(x) \end{Vmatrix},$$

где $B_k(x) = \operatorname{diag}(x-\alpha_1, \ldots, x-\alpha_k)$. Обозначим через K систему корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и через $d_k(x)$ и $d'_k(x)$ — НОД миноров k-го порядка соответственно матриц $A_k(x) = \| (x-\alpha_i)\, a'_{ij}(x) \|_1^{k,n}$ и $A'_k(x) = \| a'_{ij}(x) \|_1^{k,n}$. Из (2) следует, что каждый корень $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ многочлена $d_r(x)$ является корнем $d_k(x)$, т. е. многочлен $\sigma(x) = \prod\limits_{j=1}^{s}(x-\alpha_j)$ делит $d_k(x)$:

$$\sigma(x) \mid d_k(x). \tag{4}$$

Рассмотрим многочлен $v(x) = \dfrac{d_r(x)}{\det B_k(x)\, d'_k(x)}$. Пусть существует такой корень α_{k+1} многочлена $v(x)$, что $d'_k(\alpha_{k+1}) \neq 0$, т. е. строки матрицы $A'_k(\alpha_{k+1})$ линейно независимы. Тогда $\alpha_{k+1} \in K$, и можно считать, что $\alpha_{k+1} = \alpha_1$. Поэтому существует такая неособенная числовая матрица S_1, что

$$S_1QA(x) = \begin{Vmatrix} B_k(x) & & 0 \\ * & x-\alpha_1 & \\ 0 & & E_{r-k-1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A'_{k+1}(x) \\ A_{r-k-1}(x) \end{Vmatrix}.$$

Пусть таким образом получено

$$SA(x) = \begin{Vmatrix} B_k(x) & & 0 & \vdots & \\ & x-\alpha_1 & & \vdots & 0 \\ * & & \ddots & \vdots & \\ & & x-\alpha_l & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & & & & E_{r-k-l} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A'_{k+l}(x) \\ A_{r-k-l}(x) \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

где $k+l < \dfrac{d}{m}$, и этот процесс уже невозможно продолжить, т. е. для каждого корня β_i многочлена

$$g(x) = \frac{d_r(x)}{\prod\limits_{i=1}^{l}(x-\alpha_i)\det B_k(x)\, d'_{k+l}(x)}$$

$d'_{k+l}(\beta_i) = 0$ ($d'_{k+l}(x)$ — НОД миноров порядка $k+l$ матрицы $A'_{k+l}(x)$).

Теперь, исходя из (5), покажем, что из матрицы $A(x)$ можно выделить линейный регулярный множитель порядка $k+l+1$. Для этого в (5) над строками и столбцами первого множителя совершаем элементарные преобразования и получаем

$$TA(x) = \begin{Vmatrix} B_l(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_{k-l}(x) & 0 & 0 \\ E_l & 0 & B_l(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{r-k-l} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A'_k(x) \\ A'_l(x) \\ A_{r-k-l}(x) \end{Vmatrix},$$

где $B_l(x) = \operatorname{diag}(x-\alpha_1, \ldots, x-\alpha_l)$, $B_{k-l}(x) = \operatorname{diag}(x-\alpha_{l+1}, \ldots$ $\ldots, x-\alpha_k)$ и E_l — единичная $l \times l$-матрица. В правой части этого равенства перемножим множители. Тогда получим матрицу

$$TA(x) = \begin{Vmatrix} A_k(x) \\ A_l(x) \\ A_{r-k-l}(x) \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

где $A_k(x) = \| (x-\alpha_i)\, a'_{ij}(x) \|_1^{k,n}$, $A_l(x) = \| a'_{ij}(x) + (x-\alpha_i)\, a'_{k+i,j}(x) \|_1^{l,n}$.

Множество попарно различных корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ обозначим через K_l. Через $d_{k+l}(x)$ обозначим НОД миноров порядка $k+l$ матрицы $A_{k+l}(x)$, составленной из строк матриц $A_k(x)$ и $A_l(x)$. Рассмотрим многочлен

$$g_1(x) = \frac{d_r(x)}{d_{k+l}(x)}. \tag{7}$$

Поскольку кратность корней многочлена $d_r(x)$ не больше двух и имеет место соотношение (4), то корни многочлена $g_1(x)$ простые и $g_1(x) \mid d_k'(x)$.

Пусть теперь каждый корень β_i многочлена $g_1(x)$ можно выделять в матрице $A_k(x)$ вместо некоторых корней из множества $K_1 \subset K$ и, наоборот, вместо каждого корня $\alpha_j \in K_1$ можно выделять некоторый корень многочлена $g_1(x)$ (лемма 3). Такое соответствие между корнями множества K_1 и многочлена $g_1(x)$ будем изображать схематически $K_1 \leftrightarrow g_1(x)$. Без ограничения общности можно считать, что K_1 состоит из корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1}$. Пусть $d_{k_1}'(x)$ — НОД миноров порядка k_1 матрицы $A_{k_1}'(x) = \| a_{ij}'(x) \|_1^{k_1, n}$. На основании леммы 3 $g_1(x) \mid d_{k_1}'(x)$. Так как $\deg d_{k_1}' \leqslant (m-1)k_1$, то

$$\deg g_1 \leqslant (m-1)k_1. \tag{8}$$

Положим, что $K_1 \subset K_l$. В противном случае, как будет показано в дальнейшем, можно получить искомое разложение. Здесь и далее через $d_{k+l-k_l}(x)$ будем обозначать НОД миноров порядка $k+l-k_l$ матрицы $A_{k+l-k_l}(x)$, полученной из матрицы $A_{k+l}(x)$ отбрасыванием k_l строк с номерами $k+1, \ldots, k+k_l$, а через $d_{k_l}'(x)$ — НОД миноров порядка k_l матрицы $A_{k_l}'(x) = \| a_{lj}'(x) \|_1^{k_l, n}$.

Образуем многочлен

$$h_1(x) = \frac{d_{k+l}(x)}{d_{k+l-k_l}(x) \prod\limits_{i=1}^{k_1} (x - \alpha_i)}. \tag{9}$$

Покажем, что $\deg h_1 > 0$. Действительно, поскольку $\deg d_{k+l} \leqslant m(k+l)$, т. е. $\deg d_{k+l} = m(k+l) - w$ $(w \geqslant 0)$ и $\deg d_{k+l-k_1} \leqslant m(k+l-k_1)$, то из (9) получим, что

$$\deg h_1 \geqslant (m-1)k_1 - w. \tag{10}$$

Из (7) имеем, что $\deg g_1 = d - m(k+l) + w$. Так как $k + l < \frac{d}{m}$, то

$$\deg g_1 > 0. \tag{11}$$

На основании (8), (10) и (11) получаем, что $\deg h_1 > 0$. Соответствие между корнями многочлена $h_1(x)$ и множества K_1 будем изображать схематически так: $K_1 \leftarrow h_1(x)$.

Теперь положим, что ни один корень многочлена $h_1(x)$ не принадлежит системе K, т. е. $h_1(x) \mid d_k'(x)$. В противном случае, как покажем далее, теорема уже доказана. На основании леммы 3 каждый корень многочлена $h_1(x)$ можно выделять в матрице $A_k(x)$ вместо некоторых корней $\alpha_j \in K$. Выберем лишь те α_j, которые не принадлежат K_1. Обозначим множество этих корней через K_2. Покажем, что $K_2 \neq \varnothing$. Для этого достаточно показать, что $h_1(x)$ не делит $d_{k_1}'(x)$ $(h_1(x) \nmid d_{k_1}'(x))$, другими словами, что степень многочлена $g_2(x) = \frac{h_1(x)}{\delta_1(x)}$, где $\delta_1(x) = (h_1(x), d_{k_1}'(x))$, больше нуля.

Предположим, что $\deg g_2 = 0$, т. е. $h_1(x) \mid d_{k_1}'(x)$. Поскольку $g_1(x) \mid d_{k_1}'(x)$ и $(h_1(x), g_1(x)) = 1$, то $g_1(x) h_1(x) \mid d_{k_1}'(x)$. Отсюда, учитывая (10), имеем, что $\deg g_1 + (m-1)k_1 - w \leqslant (m-1)k_1$, т. е. $\deg g_1 \leqslant w$, что противоречит (11). Таким образом, $\deg g_2 > 0$, т. е. $K_2 \neq \varnothing$.

Пусть множество K_2 состоит из корней $\alpha_{k_1+1}, \alpha_{k_1+2}, \ldots, \alpha_{k_2}$. Теперь можно записать соответствие $K_2 \leftrightarrow g_2(x)$.

Снова полагаем, что $K_2 \subset K_l$, и образуем многочлен $h_2(x)$. Аналогично предыдущему доказывается, что $\deg h_2 > 0$, и т. д.

Если на каждом шаге для многочленов

$$h_t(x) = \frac{d'_{k+l-k_{t-1}}(x)}{d_{k+l-k_t}(x) \prod\limits_{i=k_{t-1}+1}^{k_t} (x-\alpha_i)} \quad \text{и} \quad g_t(x) = \frac{h_{t-1}(x)}{\delta_{t-1}(x)},$$

где $\delta_{t-1}(x) = (h_{t-1}(x), d'_{k_{t-1}}(x))$, выполняются условия 1) $K_t \subset K_l$ и 2) $h_t(x) \mid d'_k(x)$, то этот процесс не обрывается, т. е. вновь образованные многочлены $h_{t+1}(x)$ и $g_{t+1}(x)$ имеют степени больше нуля. Это доказывается аналогичным способом, как и для многочленов $h_1(x)$ и $g_2(x)$.

Поскольку указанный процесс не обрывается, то на некотором шаге наступит по крайней мере одно из соотношений 1') $K_t \not\subset K_l$, 2') $h_t(x) \nmid d'_k(x)$. Пусть имеет место условие «1'». Матрицу (6) изобразим схематически

$$G(x) = \left\| \begin{matrix} K_1 \leftrightarrow g_1(x) \\ K_2 \leftrightarrow g_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ K_{t-1} \leftrightarrow g_{t-1}(x) \\ K_t \leftrightarrow g_t(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ K_{t-1} \leftarrow h_{t-1}(x) \\ K_{t-2} \leftarrow h_{t-2}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ K_2 \leftarrow h_2(x) \\ K_1 \leftarrow h_1(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{r-k-l}(x) \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a\\a\\a \end{matrix}}\right\} G_k(x) \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a\\a\\a\\a \end{matrix}}\right\} G_l(x) \\ \\ \end{matrix} . \qquad (12)$$

Здесь под K_i будем понимать в матрице $G_k(x)$ множество строк с номерами $k_{i-1}+1, k_{i-1}+2, \ldots, k_i$ и в матрице $G_l(x)$ множество строк $k+k_{i-1}+1, k+k_{i-1}+2, \ldots, k+k_i$. Еще заметим, что матрицы $G_k(x)$ и $G_l(x)$ отличаются от матриц $A_k(x)$ и $A_l(x)$ из (6) порядком размещения строк, т. е. $G(x) = RTA(x)$.

Пусть $d_{k_i}(x)$ — НОД миноров порядка k_i подматрицы $G_{k_i}(x)$, составленной из строк множеств K_j ($j = 1, \ldots, i$) матрицы $G_k(x)$, и $d_{k+l-k_i}(x)$ — НОД миноров порядка $k+l-k_i$ матрицы $G_{k+l-k_i}(x)$, образованной из матрицы

$$G_{k+l}(x) = \left\| \begin{matrix} G_k(x) \\ G_l(x) \end{matrix} \right\|$$

отбрасыванием k_i строк множеств K_j ($j = 1, \ldots, i$) матрицы $G_l(x)$. Тогда, учитывая способ образования многочленов $h_i(x)$ и $g_i(x)$ и множеств корней K_i, получаем

$$d_{k_{i+1}}(x) = g_{i+1}(x)\, d_{k_i}(x)\, \varphi_i(x),$$
$$d_{k+l-k_i}(x) = h_{i+1}(x)\, d_{k+l-k_{i+1}}(x)\, \psi_i(x) \quad (i = 0, 1, \ldots, t-1).$$

Согласно предположению существует такой корень $\alpha_{k_t} \in K_t$, что $\alpha_{k_t} \notin K_l$. Пусть вместо α_{k_t} можно выделить из k_t-й строки множества K_t матрицы $G_k(x)$ некоторый корень γ_{t-1} многочлена $g_t(x)$. Это означает, что прибавив к k_t-й строке линейную комбинацию других строк множеств K_j ($j = 1, \ldots$

..., t), получим строку, делящуюся на $x - \gamma_{t-1}$. Из полученной матрицы $U_1 G(x)$ выделим множитель вида

$$F_{k_t}(x) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x - \gamma_{t-1}, 1, \ldots, 1). \tag{13}$$

Будем иметь, что

$$G(x) = H_1(x) C_1(x),$$

где $H_1(x) = U_1^{-1} F_{k_t}(x)$. Так как $g_{i+1}(x) \mid h_i(x)$ $(i = 1, \ldots, t-1)$, то γ_{t-1} есть корень многочлена $h_{t-1}(x)$. Поскольку γ_{t-1} есть корень многочлена $d_{k+l-k_{t-2}}(x)$ кратности два, то γ_{t-1} будет корнем многочлена $d'_{k+l-k_{t-2}}(x)$ кратности один ($d'_{k+l-k_{t-2}}(x)$ — НОД миноров порядка $k + l - k_{t-2}$ подматрицы $G'_{k+l-k_{t-2}}(x)$ матрицы $C_1(x)$). Теперь, совершая линейные комбинации строками матрицы $G'_{k+l-k_{t-2}}(x)$, получаем, что некоторая $k + k_{t-1}$-я строка из множества K_{t-1} матрицы $G_l(x)$ будет делиться на $x - \gamma_{t-1}$, т. е. вместо корня $\alpha_{k_{t-1}} \in K_{t-1}$ из этой строки можно выделить корень γ_{t-1}. Из полученной матрицы $U_2 C_1(x)$ выделим множитель $F_{k+k_{t-1}}(x)$ вида (13):

$$G(x) = H_2(x) C_2(x),$$

где $H_2(x) = H_1(x)\, U_2^{-1} F_{k+k_{t-1}}(x)$.

Далее нужно рассматривать матрицу $C_2(x)$. Но поскольку корни будут выделяться из строк матрицы $C_2(x)$, которые остались из матрицы $G(x)$ без изменений, то рассуждения будем вести над матрицей (12).

Теперь вместо корня $\alpha_{k_{t-1}} \in K_{t-1}$ из k_{t-1}-й строки множества K_{t-1} в матрице $G_k(x)$ выделяем некоторый корень γ_{t-2} многочлена $g_{t-1}(x)$, затем этот же корень многочлена $h_{t-2}(x)$ в матрице $G_l(x)$ выделяем из некоторой $(k + k_{t-2})$-й строки множества K_{t-2} и т. д. Наконец, в матрице $G_l(x)$ корень γ_1 многочлена $h_1(x)$ выделяем из некоторой $(k + k_1)$-й строки, а в матрице $G_k(x)$ из k_1-й строки множества K_1 вместо корня α_{k_1} выделяем некоторый корень β многочлена $g_1(x)$. После этого выделяем корни множеств K и K_l из строк матриц $G_k(x)$ и $G_l(x)$, оставшиеся без изменения. Это нетрудно сделать, учитывая вид подматриц $A_k(x)$ и $A_l(x)$ матрицы (6). Таким образом, получим

$$G(x) = H_{k+l}(x) C_{k+l}(x). \tag{14}$$

Поскольку преобразования проводились лишь над строками матрицы $G_{k+l}(x)$, то (14) имеет вид

$$G(x) = \begin{Vmatrix} B_{k+l}(x) & 0 \\ 0 & E_{r-k-l} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} D_{k+l}(x) \\ A_{r-k-l}(x) \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

где $B_{k+l}(x)$ — регулярная $(k + l) \times (k + l)$-матрица первой степени. Корень β есть корень многочлена $d_r(x)$ кратности два, а многочлена $d_{k+l}(x)$ (НОД миноров порядка $k + l$ матрицы $G_{k+l}(x)$) кратности один. Поэтому после его выделения из матрицы $G_{k+l}(x)$ строки матрицы $D_{k+l}(\beta)$ линейно независимы и из (15) нетрудно получить, что

$$VG(x) = \begin{Vmatrix} B_{k+l}(x) & & 0 \\ * & x - \beta & \\ 0 & & E_{r-k-l-1} \end{Vmatrix} C_{k+l+1}(x),$$

т. е. из матрицы $G(x)$, а значит, и из матрицы $A(x)$ выделен линейный регулярный множитель порядка $k + l + 1$. Подобным образом поступаем и в случае 2') $h_t(x) \nmid d'_k(x)$.

Теперь, если $k + l + 1 < \frac{d}{m}$, то аналогичными рассуждениями выделяем из матрицы $A(x)$ множитель порядка $k + l + 2$. Так поступая шаг за шагом, выделяем из матрицы $A(x)$ линейный регулярный множитель порядка $p \geqslant \frac{d}{m}$. Теорема доказана.

Пусть $A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m, \quad |A_0| \neq 0$ (16)

— регулярная полиномиальная матрица. Напомним, что корни многочлена $\det A(x)$ называем характеристическими числами матрицы $A(x)$.

Теорема 2. Регулярная полиномиальная матрица (16), характеристические числа которой имеют кратности не больше двух, разложима в произведение линейных регулярных множителей.

Доказательство следует из теоремы 1.

Замечание. Если среди характеристических чисел регулярной полиномиальной матрицы (16) имеются числа кратностей больше двух, то матрица $A(x)$ может и не допускать разложения на линейные регулярные множители.

Пример. Из матрицы

$$A(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} (x-\alpha_2)(x-\alpha_4)^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\times \\ & & & \times(x-\alpha_4) \end{Vmatrix}$$

при условии, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — попарно различные и $3\alpha_4 - \alpha_3 - 2\alpha_1 = 0$, не выделяется линейный регулярный множитель. Это проверяется на основании критерия из [2].

Из этого примера следует, что в работе [3] теорема 2 при $r > 2$ неверна.

Теорема 3. Пусть регулярные $n \times n$-матрицы $A(x)$ и $B(x)$ степени m не имеют кратных характеристических чисел и их характеристические многочлены совпадают. Тогда существуют разложения

$$A(x) = C_1(x) \ldots C_m(x), \quad B(x) = D_1(x) \ldots D_m(x)$$

на линейные регулярные множители матриц $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $\det C_i(x) = \det D_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Доказательство. Составляем $2n \times 2n$-матрицу

$$F(x) = \begin{Vmatrix} A(x) & * \\ 0 & B(x) \end{Vmatrix},$$

элементарные делители которой взаимно просты. Далее используем метод доказательства теоремы 1 и метод индукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. К., 1976, с. 29—40.
2. *Казимирский П. С.* Матричные многочлены и уравнения.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 23—31.
3. *Казімірський П. С., Уханська Д. В.* Деякі достатні умови розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники.— Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1969, вип. 31, с. 51—53.
4. *Маркус А. С., Мереуца И. В.* О некоторых свойствах простых λ-матриц.— Мат. исслед., 1975, **10**, № 3, с. 207—213.
5. *Теребейко Б. І.* Одна достатня умова розкладності матричного квадратного тричлена на лінійні множники.— Вісн. Львів. політехн. ин-ту, 1965, вип. 8, с. 67—69.
6. *Newman M.* On the Smith normal form.— J. Res. Nat. Bur. Stand. B, 1971, 75, p. 81—84.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.XII 1976 г.