

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки.— ДАН СССР, 1967, 174, № 3, с. 534—537.
2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969. 424 с.
3. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 211 с.
4. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Об оптимизации напряженного состояния в зоне локальной термообработки оболочек вращения.— Прикл. механика, 1975, № 11, № 5, с. 3—7.
5. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Определение экстремальных перепадов температуры по толщине при осесимметричном нагреве оболочек вращения.— Тепло-вые напряжения в элементах конструкций, 1971, вып. 11, с. 26—31.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР
Львовский университет

Поступила в редколлегию
26.IX 1976 г.

УДК 539.3

А. Р. Гачкевич, Р. С. Мусий

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ И ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ
ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ПЛАСТИН ПРИ МАГНИТНОМ УДАРЕ**

Определим и исследуем распределение температуры и напряжений в упругой электропроводной пластине при магнитном ударе на основаниях. Принимаем, что термоупругое состояние обусловлено силовым действием электромагнитного поля на индукционные токи и выделением при их протекании джоулева тепла, характеристики материала считаем постоянными.

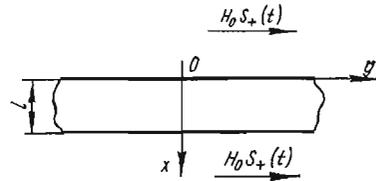


Рис. 1

Постановка и решение задачи. Пусть на обоих основаниях упругой электропроводной пластины происходит внезапное включение магнитного поля величиной H_0 , которое в дальнейшем поддерживается постоянным, т. е. $H_y(0, t) = H_y(l, t) = H_0 S_+(t)$, где $S_+(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ — функция скачка (рис. 1).

Из уравнений Максвелла в пренебрежении токами смещения в области пластины [1, 3] с использованием преобразования Лапласа найдем

$$\vec{H} = \{0; H_y(x, \tau_*) \equiv H(x, \tau_*); 0\}, \quad \vec{E} = \{0; 0; E_z(x, \tau_*) \equiv E(x, \tau_*)\}, \quad (1)$$

где

$$H_0^{-1} H(x, \tau_*) = 1 - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)\pi} e^{-(2k+1)^2 \pi^2 \tau_*}, \quad (2)$$

$$H_0^{-1} E(x, \tau_*) = -\frac{4}{\sigma l} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)\pi x e^{-(2k+1)^2 \pi^2 \tau_*}.$$

Здесь $\tau_* = \frac{t}{\sigma \mu l}$; σ — коэффициент электропроводности; μ — магнитная проницаемость, $x = \frac{X}{l}$ — безразмерная толщинная координата; t — время.

По найденным H и E удельная плотность джоулева тепла и пондеромоторных сил определяются по формулам

$$Q = \sigma E^2(x, \tau_*), \quad \vec{F} = \{F_x(x, \tau_*) \equiv F(x, \tau_*) = -\sigma \mu E(x, \tau_*) H(x, \tau_*); 0; 0\}. \quad (3)$$

На рис. 2 показаны графики зависимости величин $E(x, \tau_*)$ (кривые 1) и $F(x, \tau_*)$ (кривые 2) от безразмерного времени τ_* при $x = 0,25$. Штриховые линии соответствуют $E(0,25; \tau_*)$ и $F(0,25; \tau_*)$ при ограничении первыми членами сумм в решениях (2). Как видно из графиков, максимальное значение E достигается при $\tau_* \approx 0,03$, а $F - \tau_* \approx 0,055$, что, в частности, для пластины из стали X18H9T толщиной 0,01 м соответствует $t \approx 5 \cdot 10^{-6}$ с и $t \approx 9 \cdot 10^{-6}$ с.

Примем, что основания пластины $x = 0; 1$ теплоизолированы и свободны от силовой нагрузки. В соответствии с тем, что термоупругое состояние пластины обусловлено действием джоулева тепла и пондеромоторной силы, составляющие напряжений и температуру представим в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \quad (j = x; y; z), \quad T = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad (4)$$

где $\sigma_{ij}^{(1)}, T^{(1)}$ — составляющие, соответствующие джоулеву теплу, а $\sigma_{ij}^{(2)}, T^{(2)}$ — пондеромоторным силам. Функции $\sigma_{ij}^{(1)}, T^{(1)}$ находим из системы уравнений термоупругости [1, 2] при $\vec{F} = 0$.

Составляющие $\sigma_{ij}^{(2)}$ определяем из уравнения динамической задачи теории упругости. Так как в данном случае термическое возмущение пластины может вызываться только деформацией от нестационарных механических воздействий, то приращение температуры находится по известным напряжениям по формуле [2]

$$T^{(2)} - T_0 = \frac{\alpha \kappa E T_0}{\lambda(1-2\nu)} \operatorname{div} \vec{u}^{(2)}, \quad (5)$$

где T — отклонение температуры от начальной T_0, K ; $\vec{u}(x, t) = \{u(x, t); 0; 0\}$ — вектор перемещения; κ, λ — коэффициенты температуро- и теплопроводности; α — коэффициент линейного расширения; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона. Для получения оценки искомых функций в дальнейшем ограничимся в выражениях (3) первыми членами сумм.

С использованием преобразования Лапласа найдем выражения для соответствующих джоулеву теплу составляющих

$$\begin{aligned} T^{(1)}(x, \tau) &= \frac{8H_0^2}{\sigma\lambda} \left[\frac{1}{a} (1 - e^{-a\tau}) - \frac{\cos 2\pi x}{a - 4\pi^2} (e^{-a\tau} - e^{-4\pi^2\tau}) \right], \\ \sigma_*^{(1)} &= \frac{8\alpha H_0^2 a}{\sigma\lambda} \left\{ A_0^{-1} \left[A_1 + A_2 \cos 2\pi x - A_3 \operatorname{ch} \eta_0 \left(\frac{1}{2} - x \right) \right] e^{-a\tau} + \right. \\ &+ 8\eta_0^2 \pi^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k}^{-1} \cos \pi(2k+1) \left(x - \frac{1}{2} \right) \left[a\eta_0 \sin \frac{(2k+1)\pi}{\eta_0} \tau - \right. \\ &\quad \left. \left. - \pi(2k+1) \cos \frac{(2k+1)\pi}{\eta_0} \tau \right] \right\}, \quad (6) \\ \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} &= \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \sigma_*^{(1)} - \alpha T^{(1)} \right], \end{aligned}$$

где

$$A_0 = a^2 (4\pi^2 + a^2 \eta_0^2) \operatorname{ch} \frac{a\eta_0}{2}; \quad A_1 = (4\pi^2 + a^2 \eta_0^2) \operatorname{ch} \frac{a\eta_0}{2};$$

$$A_2 = a^2 \eta_0^2 \operatorname{ch} \frac{a\eta_0}{2}; \quad A_3 = 2(2\pi^2 + a^2 \eta_0^2);$$

$$A_{1k} = (-1)^k (2k+1)^2 [4 - (2k+1)^2] [a^2 \eta_0^2 + (2k+1)^2 \pi^2] [2 - (2k+1)^2]^{-1}.$$

Здесь $\sigma_x^{(1)} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{xx}^{(1)}$; $\sigma_{xx}^{(1)}$ — нормальное напряжение в направлении оси x ; $\tau = \frac{\kappa t}{l^2}$ — критерий Фурье; $c_1^2 = \eta_0^{-2} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}$ — скорость распространения упругой волны расширения; $a = \kappa^{-1}\sigma^{-1}\mu^{-1}$.

Соответствующие поперомоторной силе составляющие напряжений, найденные аналогично $\sigma_{ij}^{(1)}$, будут такими:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)} = & \frac{4\mu l(1-2\nu)H_0^2}{E} \left\{ B_0^{-1} \left[\operatorname{ch} 2a\eta_0 \left(x - \frac{1}{2} \right) - \operatorname{ch} a\eta_0 \cos 2\pi x \right] e^{-2a\tau} - \right. \\ & - B_1^{-1} \sin \pi x \left[\pi e^{-a\tau} + a\eta_0 \sin \frac{\pi}{\eta_0} \tau - \pi \cos \frac{\pi}{\eta_0} \tau \right] + \\ & + 16\eta_0 \pi^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k}^{-1} \cos \pi(2k+1) \left(x - \frac{1}{2} \right) \left[2a \sin \frac{(2k+1)\pi}{\eta_0} \tau - \right. \\ & \left. \left. - \frac{(2k+1)\pi}{\eta_0} \cos \frac{(2k+1)\pi}{\eta_0} \tau \right] \right\}, \quad (7) \\ \sigma_{yy}^{(2)} = \sigma_{zz}^{(2)} = & \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \sigma_x^{(2)}. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)} = & \frac{(1-2\nu)}{E} \sigma_{xx}^{(2)}; \quad B_0 = (\pi^2 + a^2\eta_0^2) \operatorname{ch} a\eta_0, \quad B_1 = \pi^2 + a^2\eta_0^2, \\ B_{1k} = & (-1)^k [4 - (2k+1)^2] [(2k+1)^2\pi^2 + 4a^2\eta_0^2]. \end{aligned}$$

По найденному значению $\sigma_x^{(2)}$ по формуле (5) с учетом соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \sigma_{xx}$$

определяем составляющую температурного поля $T^{(2)}$.

На рис. 3 показано изменение температуры в электропроводной пластине из стали X18H9T толщиной 0,01 м для значений $x = 0; 0,125; 0,25; 0,5$ (кривые 1—4) в зависимости от критерия Фурье $\tau \equiv \frac{\kappa t}{l^2} \approx 0,04t$. Как видно из графиков, максимальная температура достигается на поверхности $x = 0$ при $t \approx 1,25 \cdot 10^{-4}$ с. При $t \gg 7,5$ с температура практически не меняется по толщине и во времени. Отметим, что в исследуемом случае составляющая температуры $T^{(2)}$ пренебрежимо мала.

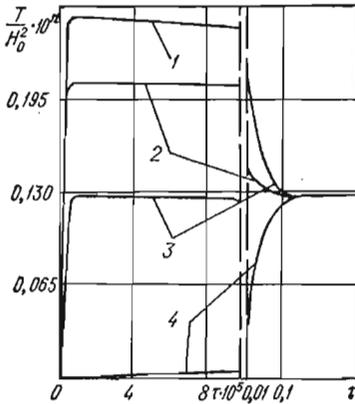


Рис. 3

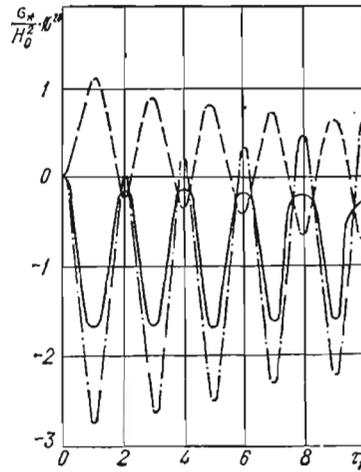


Рис. 4

На рис. 4 приведена зависимость нормальных напряжений $\sigma_* = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{xx}$ при $x = 0,25$ от безразмерного времени $\tau_1 = \frac{\tau}{\tau_0}$ (штриховые линии соответствуют $\sigma_*^{(1)}$, штрихпунктирные — $\sigma_*^{(2)}$ и сплошные — $\sigma_* = \sigma_*^{(1)} + \sigma_*^{(2)}$). Из графиков видно, что максимальные уровни этих составляющих имеют величину порядка магнитного давления $p = \frac{\mu H_0^2}{2}$. При этом напряжения $\sigma_*^{(1)}$ и $\sigma_*^{(2)}$ одного порядка.

Отметим, что максимальные уровни соответствующих джоулеву теплу нормальных напряжений $\sigma_{yy}^{(1)}$, $\sigma_{zz}^{(1)}$ в направлении осей y , z на порядок больше напряжений $\sigma_{yy}^{(2)}$, $\sigma_{zz}^{(2)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гачкевич А. Р. О влиянии периодического во времени изменения джоулева тепла и ponderomotorных сил на температуру и напряжения в электропроводных телах. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 84—89.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970. 307 с.
3. Moon F. C., Chattopadhyay S. Magnetically induced stress waves in a conducting solid—theory and experiment. — J. Appl. Mech., 1974, 41, N 3; Trans. ASME. Ser. E, 1974, 96, p. 641—646.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР
Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
12.X 1976 г.