

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПЕРЕПАДОВ ТЕМПЕРАТУРЫ
И СИЛОВОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ
ЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМООБРАБОТКИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

В работе [4] показано, что для узких зон локальной термообработки оболочек вращения постоянным по толщине экстремальным температурным полем за счет рационального выбора силового нагружения вне области оптимизации можно уменьшить уровень напряженного состояния в зоне высоких температур. В настоящей статье сделана попытка дальнейшего уменьшения уровня этих напряжений и повышения в этой связи эффективности локальной термообработки путем совместного применения силовой нагрузки и экстремальных перепадов температуры по толщине оболочки.

Пусть оболочка вращения, отнесенная к каноническим координатам, находится под действием локализованного в некоторой области $s_1 \leq s \leq s_2$ осесимметричного переменного по толщине температурного поля. Рассмотрим задачу об оптимизации напряженного состояния в зоне $s_3 \leq s \leq s_4$ ($s_3 \geq s_1$, $s_4 \leq s_2$) за счет экстремального выбора перепадов температуры и нормальной силовой нагрузки, приложенной вне области оптимизации. Ограничимся случаем, когда изменение температурного поля по толщине оболочки задано по линейному закону ($t = T_1 + \frac{y}{h} T_2$). В качестве функционального критерия оптимальности, как и ранее [4], примем условие минимума энергии упругой деформации этой области. Для рассматриваемой задачи она имеет вид

$$K[\theta, V, T_2] = \frac{2\pi D_1}{b} \int_{s_3}^{s_4} \frac{r}{2} \left\{ \dot{V}^2 - 2\nu \frac{\dot{r}}{r} \dot{V} V + \left(\frac{\dot{r}}{r} V \right)^2 + b \left[\dot{\theta}^2 + 2\nu \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} \theta + \left(\frac{\dot{r}}{r} \theta \right)^2 + 2(1 + \nu) \frac{\alpha}{h} T_2 \left(\dot{\theta} + \frac{\dot{r}}{r} \theta + \frac{\alpha}{h} T_2 \right) \right] \right\} ds. \quad (1)$$

Функция напряжений V и функция углов поворота θ связаны между собой системой разрешающих уравнений [3]

$$\begin{aligned} \ddot{V} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{V} - \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \nu k_1 k_2 \right) V + b k_2 \theta &= 2b \dot{T}_1, \\ \ddot{\theta} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \nu k_1 k_2 \right) \theta - k_2 V &= -\alpha \frac{1 + \nu}{h} \dot{T}_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $T_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t d\gamma$; $T_2 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h t \gamma d\gamma$; $r = r(s)$ — радиус поперечного сечения; t — температура; k_1 , k_2 — главные кривизны срединной поверхности; $b = \frac{D_0}{D_1}$; $D_0 = 2Eh$ — жесткость на растяжение; $D_1 = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \nu^2}$ — жесткость на изгиб; $2h$ — толщина оболочки; ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент температурного расширения; E — модуль упругости. Точка применяется для обозначения производной по s .

Задача об оптимизации напряженного состояния в области $s_3 \leq s \leq s_4$ оболочки вращения сводится к нахождению экстремума функционала (1) на множестве допустимых функций θ , V , T_2 , удовлетворяющих соотношениям (2). С использованием методов вариационного исчисления [2] из необходимого условия экстремума функционала (1), приняв варьируемые значения функций θ , V , T_2 и их производных при $s = s_3$, s_4 произвольными,

получим систему уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\dot{r}}{r} \frac{d}{ds} - \left(\frac{r^2}{r^2} - \nu k_1 k_2 \right) \right] (V - \lambda_2) + k_2 \lambda_1 = 0, \\ & \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\dot{r}}{r} \frac{d}{ds} - \left(\frac{r^2}{r^2} + \nu k_1 k_2 \right) \right] \left(\theta - \frac{1}{b} \lambda_1 \right) - k_2 \lambda_2 = -\alpha \frac{1+\nu}{h} T_2, \\ & \left[\frac{d}{ds} + \frac{\dot{r}}{r} \right] \left(\theta - \frac{1}{b} \lambda_1 + \frac{2\alpha}{h} \right) T_2 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и систему экстремальных условий, накладываемых на граничные значения этих функций и множителей Лагранжа λ_1, λ_2 в сечениях $s = s_3, s_4$:

$$\begin{aligned} \dot{V} - \nu \frac{\dot{r}}{r} V - \dot{\lambda}_2 &= 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \\ \dot{\theta} + \nu \frac{\dot{r}}{r} \theta + \alpha \frac{1+\nu}{h} T_2 - \frac{1}{b} \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из анализа уравнений Эйлера (3) и системы разрешающих уравнений (2) следует, что

$$\lambda_1(s) = 0, \quad \lambda_2(s) = V. \quad (5)$$

Подставляя значения этих функций в условия (4), получаем

$$V|_{s=s_3, s_4} = 0, \quad \left(\dot{\theta} + \nu \frac{\dot{r}}{r} \theta + \alpha \frac{1+\nu}{h} T_2 \right) \Big|_{s=s_3, s_4} = 0. \quad (6)$$

Из третьего уравнения системы (3) с учетом (5) для определения оптимальных перепадов температуры T_2 по толщине оболочки получаем соотношение

$$T_2 = -\frac{h}{2\alpha} \left(\dot{\theta} + \frac{\dot{r}}{r} \theta \right). \quad (7)$$

Следует отметить, что, как и ранее [5], исключая из системы уравнений (2), (7) функции V, T_2 , приходим к одному разрешающему уравнению, записанному относительно функции прогибов θ :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\dot{r}}{r} \frac{d}{ds} - \left(\frac{r^2}{r^2} - \nu k_1 k_2 \right) \right] \left\{ \frac{1}{k_2} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\dot{r}}{r} \frac{d}{ds} - \left(\frac{r^2}{r^2} - k_1 k_2 \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2\nu k_2}{1-\nu} \right\} \theta = \frac{2\alpha b}{1-\nu} T_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, определение напряженно-деформированного состояния в оптимизируемой области оболочки сводится к решению уравнения (8) при граничных условиях (6), которые совпадают с условиями свободных краев и с учетом соотношения (7) могут быть представлены в виде

$$V|_{s=s_3, s_4} = 0, \quad \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{r}}{r} \theta \right) \Big|_{s=s_3, s_4} = 0. \quad (9)$$

Выполнение условий (9) в сечениях $s = s_3, s_4$ оболочек вращения наряду с условиями механического сопряжения решения в этих сечениях может быть обеспечено за счет определенным образом выбранной нормальной силовой нагрузки, приложенной вне зоны оптимизации.

Рассмотрим более подробно решение задачи об оптимизации напряженного состояния в зоне локальной термообработки на примере длинной цилиндрической оболочки при осесимметричном локальном нагреве области $|x| \leq \eta$ температурным полем [1]

$$T_1 = T_0 \left[1 - 3 \left| \frac{x}{\eta} \right|^2 + 2 \left| \frac{x}{\eta} \right|^3 \right] \quad (|x| \leq \eta), \quad T_1 = 0 \quad (|x| \geq \eta). \quad (10)$$

Здесь $x = \frac{az}{R}$; $a^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^3}{4h^2}$; z — осевая координата. Для цилиндрической оболочки соотношения (8), (9) будут такими:

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + 4k^4 w_0 = 4k^4 \alpha T_1, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} \Big|_{x=\pm\eta} = 0, \quad \frac{d^3 w_0}{dx^3} \Big|_{x=\pm\eta} = 0, \quad (12)$$

где $k^4 = \frac{2}{1-\nu}$; $w_0 = \frac{w}{R}$ — безразмерная функция прогибов. Решение уравнения (11) для заданного температурного поля (10) имеет вид

$$w_0 = \frac{\alpha T_0}{2} \left[1 - 3 \left| \frac{x}{\eta} \right|^2 + 2 \left| \frac{x}{\eta} \right|^3 \right] [\operatorname{sgn}(x + \eta) - \operatorname{sgn}(x - \eta)] + \\ + \frac{3\alpha T_0}{2k^3\eta^3} \{ e^{-k|x-\eta|} [\cos k(x - \eta) + \sin k|x - \eta|] + e^{-k|x+\eta|} [\cos k(x + \eta) + \\ + \sin k|x + \eta|] - 2e^{-k|x|} [\cos kx + \sin k|x|] + k\eta [e^{-k|x+\eta|} \sin k|x + \eta| - \\ - e^{-k|x-\eta|} \sin k|x - \eta|] \} + C_1 \operatorname{ch} kx \cos kx + C_2 \operatorname{sh} kx \sin kx. \quad (13)$$

Здесь коэффициенты C_1 и C_2 определяются из условий (12). Соотношение (7) для определения оптимальных перепадов температурного поля по толщине оболочки будет таким:

$$T_2 = - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4\alpha} \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad (14)$$

а напряженно-деформированное состояние в оптимизируемой области на внешней и внутренней поверхностях оболочки определяется формулами

$$\sigma_1^{(\pm)} = \pm \frac{\alpha E}{1+\nu} T_2, \quad \sigma_2^{(\pm)} = E(w_0 - \alpha T_1) - \sigma_1^{(\pm)}, \quad (15)$$

где индекс «+» относится к внешней, а индекс «-» к внутренней поверхности оболочки. В области $x > \eta$ функция прогибов w_0 , удовлетворяющая нулевым условиям на бесконечности, имеет вид

$$w_0 = \frac{R}{2D_0} \int_{\eta}^{\infty} g_n(x_0) e^{-|x-x_0|} [\cos(x - x_0) + \sin|x - x_0|] dx_0 + \\ + e^{(n-x)} [C_3 \cos(x - \eta) + C_4 \sin(x - \eta)]. \quad (16)$$

Здесь $g_n(x)$ — нормальная силовая нагрузка.

Аналитическое выражение функции w_0 для отрицательных значений (область $x < -\eta$) записывается аналогично. Из условий механического сопряжения следует, что граничные значения функции и ее трех первых производных в сечении $x = \eta$ должны быть сопряжены с соответствующими значениями в этом сечении, найденными из решения (13) для зоны оптимизации. Эти условия можно удовлетворить за счет коэффициентов C_3 , C_4 и интенсивности силовой нагрузки. Так как ограничения на силовую нагрузку носят интегральный характер, то имеется возможность оптимизировать напряженное состояние в зоне локального нагрева, используя различные схемы силового нагружения вне этой зоны.

Ограничимся рассмотрением случая, когда на участке $\eta_2 \leq \eta \leq \eta_3$, $\eta_2 \geq \eta$ цилиндрической оболочки приложено силовую нагрузку постоянной интенсивности g_0 . Тогда выражение (16) запишется в виде

$$w_0 = - \frac{Rg_0}{2D_0} \{ [e^{-|x-\eta_2|} \cos(x - \eta_2) - 1] \operatorname{sgn}(x - \eta_2) - [e^{-|x-\eta_3|} \cos(x - \eta_3) - \\ - 1] \operatorname{sgn}(x - \eta_3) \} + e^{(n-x)} \{ e^{-(\eta_3-\eta)} [\cos(\eta_3 - \eta) - 2 \sin(\eta_3 - \eta)] - \\ - e^{-(\eta_2-\eta)} [\cos(\eta_2 - \eta) - 2 \sin(\eta_2 - \eta)] \} \cos(x - \eta) + \\ + e^{-(n+x)} \{ e^{-(\eta_3-\eta)} \sin(\eta_3 - \eta) - e^{-(\eta_2-\eta)} \sin(\eta_2 - \eta) \} \sin(x - \eta). \quad (17)$$

При этом параметры η_2 и η_3 связаны между собой соотношениями

$$\frac{e^{-(\eta_3-\eta)} [\cos(\eta_3 - \eta) - \sin(\eta_3 - \eta)] - e^{-(\eta_2-\eta)} [\cos(\eta_2 - \eta) - \sin(\eta_2 - \eta)]}{e^{-(\eta_3-\eta)} \sin(\eta_3 - \eta) - e^{-(\eta_2-\eta)} \sin(\eta_2 - \eta)} = \frac{2A_1}{B_1}, \quad (18)$$

где

$$A_1 = \frac{3\alpha T_0}{2\eta^3 k^3} [1 + e^{-2k\eta} (\cos 2k\eta + \sin 2k\eta) - 2e^{-k\eta} (\cos k\eta + \sin k\eta) + k\eta e^{-2k\eta} \sin 2k\eta] + C_1 \operatorname{ch} k\eta \cos k\eta + C_2 \operatorname{sh} k\eta \sin k\eta;$$

$$B_1 = \frac{3\alpha T_0}{2\eta^3 k^2} \{2(2e^{-k\eta} \sin k\eta - e^{-2k\eta} \sin 2k\eta) - k\eta [1 - e^{-2k\eta} (\cos 2k\eta - \sin 2k\eta)]\} + k [(C_1 + C_2) \operatorname{sh} k\eta \cos k\eta + (C_2 - C_1) \operatorname{ch} k\eta \sin k\eta].$$

Интенсивность силовой нагрузки определяется по формуле

$$g_0 = \frac{EhB_1}{R [e^{-(\eta_3 - \eta)} \sin (\eta_3 - \eta) - e^{-(\eta_2 - \eta)} \sin (\eta_2 - \eta)]}. \quad (19)$$

Следует отметить, что из приведенных результатов по определению напряженно-деформированного состояния, интенсивности и расположения силовой нагрузки вне области оптимизации, полагая формально значение

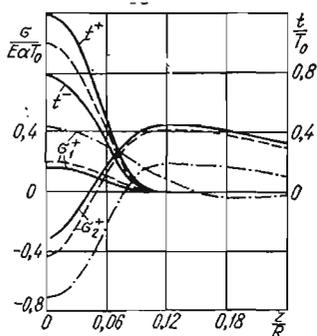


Рис. 1

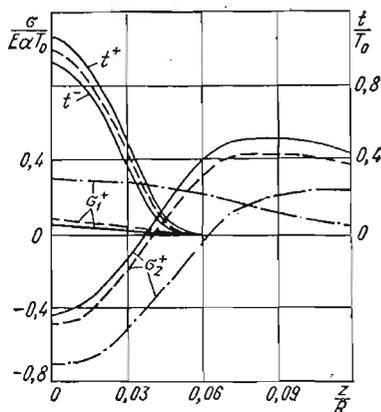


Рис. 2

параметра $k = 1$, можно получить значения соответствующих величин для случая локальной термообработки постоянными по толщине температурными полями.

Результаты проведенных численных расчетов по определению оптимальных перепадов температурного поля по толщине цилиндрической оболочки с параметром $\frac{R}{h} = 40$ при $\nu = 0,3$; $\eta_2 = \eta$ и распределению осевых $\sigma_1^{(+)}$ и кольцевых $\sigma_2^{(+)}$ напряжений на внешней поверхности оболочки для $\eta = \frac{a}{8}$

и $\eta = \frac{a}{16}$ приведены на рис. 1, 2 соответственно. Параметр η_3 определяется из соотношения (18). Штрихпунктирные линии соответствуют случаю ненагруженной оболочки, штриховые — при наличии силовой нагрузки и постоянного по толщине температурного поля ($k = 1$), сплошные — при наличии силовой нагрузки и оптимальных перепадов температурного поля по толщине оболочки.

Из приведенных результатов видно, что для узких зон локального нагрева оптимальными по толщине температурными полями с помощью силовой нагрузки постоянной интенсивности, приложенной вне зоны оптимизации, можно обеспечить дополнительное понижение уровня напряженного состояния в зоне высоких температур. При этом интенсивность внешней нагрузки будет на 30—35% меньше, чем при локальной термообработке оболочки постоянным по толщине температурным полем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки.— ДАН СССР, 1967, 174, № 3, с. 534—537.
2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969. 424 с.
3. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 211 с.
4. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Об оптимизации напряженного состояния в зоне локальной термообработки оболочек вращения.— Прикл. механика, 1975, № 11, № 5, с. 3—7.
5. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Определение экстремальных перепадов температуры по толщине при осесимметричном нагреве оболочек вращения.— Тепло-вые напряжения в элементах конструкций, 1971, вып. 11, с. 26—31.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР
Львовский университет

Поступила в редколлегию
26.IX 1976 г.

УДК 539.3

А. Р. Гачкевич, Р. С. Мусий

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ И ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ
ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ПЛАСТИН ПРИ МАГНИТНОМ УДАРЕ**

Определим и исследуем распределение температуры и напряжений в упругой электропроводной пластине при магнитном ударе на основаниях. Принимаем, что термоупругое состояние обусловлено силовым действием электромагнитного поля на индукционные токи и выделением при их протекании джоулева тепла, характеристики материала считаем постоянными.

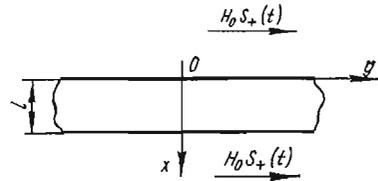


Рис. 1

Постановка и решение задачи. Пусть на обоих основаниях упругой электропроводной пластины происходит внезапное включение магнитного поля величиной H_0 , которое в дальнейшем поддерживается постоянным, т. е. $H_y(0, t) = H_y(l, t) = H_0 S_+(t)$, где $S_+(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ — функция скачка (рис. 1).

Из уравнений Максвелла в пренебрежении токами смещения в области пластины [1, 3] с использованием преобразования Лапласа найдем

$$\vec{H} = \{0; H_y(x, \tau_*) \equiv H(x, \tau_*); 0\}, \quad \vec{E} = \{0; 0; E_z(x, \tau_*) \equiv E(x, \tau_*)\}, \quad (1)$$

где

$$H_0^{-1} H(x, \tau_*) = 1 - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)\pi} e^{-(2k+1)^2 \pi^2 \tau_*}, \quad (2)$$

$$H_0^{-1} E(x, \tau_*) = -\frac{4}{\sigma l} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)\pi x e^{-(2k+1)^2 \pi^2 \tau_*}.$$

Здесь $\tau_* = \frac{t}{\sigma \mu l}$; σ — коэффициент электропроводности; μ — магнитная проницаемость, $x = \frac{X}{l}$ — безразмерная толщинная координата; t — время.

По найденным H и E удельная плотность джоулева тепла и пондеромоторных сил определяются по формулам

$$Q = \sigma E^2(x, \tau_*), \quad \vec{F} = \{F_x(x, \tau_*) \equiv F(x, \tau_*) = -\sigma \mu E(x, \tau_*) H(x, \tau_*); 0; 0\}. \quad (3)$$