4. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике. К., «Наук. думка», 1974. 259 с.
5. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. К., «Наук. думка», 1976. 240 с.

Институт проблем машиностроения АН УССР

Поступила в редколлегию 26.III 1976 г.

УДК 539.377

Г. С. Кит, М. Г. Кривцун

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОГО ДИСКА С ТРЕЩИНАМИ, НА БЕРЕГАХ КОТОРЫХ ЗАДАНЫ ТЕМПЕРАТУРА ИЛИ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК

Рассмотрим упругий изотропный диск радиусом R и единичной толщины. Декартовы и полярные координаты комплексного переменного $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу диска R (рис. 1). Обозначим через $L = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$ совокупность отрезков $L_k = [a_k, b_k]$ оси Ox, не имеющих общих точек и не выходящих на обвод диска.

Пусть в теплоизолированном с боковых поверхностей сплошном диске задано симметричное относительно оси Ox стационарное температурное поле $t_0(x, y)$, а на обводе поддерживается заданная температура $t_0(1, \theta)$. Допустим, что по отрезкам L_k этой оси проведены разрезы, на берегах которых поддерживается заданная температура $f_0(x)$ или тепловой поток $q(x)$, направленный в противоположные стороны по нормали к трещине.

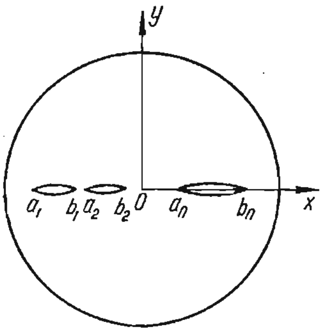

Рис. 1

Если функцию $T(x, y)$, описывающую распределение температуры в диске с трещинами, представить в виде

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y), \tag{1}$$

то для определения неизвестной функции $t(x, y)$ необходимо решить уравнение Лапласа $\Delta t = 0$ при граничных условиях

$$t(1, \theta) = 0, \tag{2}$$

$$t(x, \pm 0) = f(x) \quad \text{или} \quad \lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^{\pm} = \mp q(x), \quad x \in L, \tag{3}$$

где $f(x) = f_0(x) - t_0(x, 0)$, λ — коэффициент теплопроводности тела.

Будем искать температуру $t(x, y)$ в виде потенциала простого слоя

$$t(x, y) = \operatorname{Re} F(z), \quad F(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \gamma(\tau) \ln \frac{\tau - z}{1 - \tau z}\, d\tau, \tag{4}$$

что соответствует размещению на L источников тепла с неизвестной плотностью $\gamma(x)$. Определенная таким образом функция $t(x, y)$ является гармонической и удовлетворяет граничному условию (2). Из граничного условия (3) для определения плотности источников тепла получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \gamma(\tau) \ln\left|\frac{\tau - x}{1 - \tau x}\right| d\tau = f(x), \quad x \in L, \tag{5}$$

или

$$\int_L \gamma(\tau)\,\delta(\tau - x)\,d\tau = q(x), \quad x \in L,$$

где $\delta(\tau - x)$ — дельта-функция. Из последнего уравнения видно, что при заданном на берегах трещин тепловом потоке $q(x)$ плотность источников тепла пропорциональна заданному потоку.

Для решения уравнения (5) продифференцируем его по x и сделаем в полученном выражении замену переменных

$$\xi = \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^2, \quad w = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2. \tag{6}$$

Тогда уравнение для определения плотности источников тепла примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_*} \gamma_*(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi - w} = f_*(w), \quad w \in L_*, \tag{7}$$

где

$$\gamma_*(\tau) = (1+\tau)^2\,\gamma(\tau); \quad f_*(x) = (1+x)^2 f'(x); \quad L_* = \bigcup_{k=1}^{n} L_k^*;$$

$$L_k^* = [a_k^*, b_k^*]; \quad a_k^* = \left(\frac{1 - b_{n+1-k}}{1 + b_{n+1-k}}\right)^2; \quad b_k^* = \left(\frac{1 - a_{n+1-k}}{1 + a_{n+1-k}}\right)^2.$$

Неограниченное на концах разрезов решение уравнения (7) запишем так [1]:

$$\gamma_*(w) = \frac{i}{R^+(w)}\left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k w^k - \frac{1}{\pi i}\int_{L_*} \frac{R^+(\xi)\,f_*(\xi)\,d\xi}{\xi - w}\right], \tag{8}$$

где

$$R(w) = \sum_{k=1}^{n} (w - a_k^*)^{1/2}(w - b_k^*)^{1/2}, \quad \lim_{w\to\infty} w^{-1}R(w) = 1,$$

а действительные постоянные $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k \int_{b_m^*}^{a_{m+1}^*} \frac{w^k\,dw}{R(w)\sqrt{w}} = 4\,[f(b_{n-m}) - f(a_{n+1-m})] -$$

$$- \frac{1}{\pi i}\int_{b_m^*}^{a_{m+1}^*} \frac{dw}{R(w)\sqrt{w}} \int_{L_*} \frac{R^+(\xi)\,f_*(\xi)\,d\xi}{\xi - w}, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad b_0^* \equiv 0, \quad a_{n+1}^* \equiv 1.$$

Определим термоупругое состояние рассматриваемого диска, обусловленное температурным полем (1). Предположим, что граница диска свободна от внешних усилий, а на трещинах заданы нормальные напряжения $\sigma_{yy}^p(x)$. Вследствие симметричности температурного поля относительно линии расположения трещин касательные напряжения на всей оси Ox будут равны нулю и граничные условия задачи запишутся так:

$$\sigma_{\rho\rho}(1, \theta) + i\sigma_{\rho\theta}(1, \theta) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_{yy}^p(x), \quad x \in L. \tag{9}$$

Термоупругое состояние диска с трещинами представим в виде суммы двух составляющих $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\gamma + \sigma_{ij}^\mu$ $(i, j = x, y$ или $\rho, \theta)$, соответствующих источникам тепла с плотностью $\gamma(x)$ и скачку производной от смещений берегов трещин $\mu(x) = \frac{2G}{\varkappa+1}\frac{\partial}{\partial x}(v^{+} - v^{-})$.

Напряжения $\sigma_{yy}^{\mu}(x)$ выражаются через $\mu(x)$ так [3]:

$$\sigma_{yy}^{\mu}(x) = \frac{1}{\pi}\int_L \mu(\tau)\left[\frac{1}{\tau - x} + K(\tau, x)\right]d\tau,$$

$$K(\tau, x) = \tau + \frac{x-\tau}{\omega} + \frac{x - g\tau}{\omega^2} + \frac{x - \tau(1+g)}{\omega^3}, \quad g = 1 - \tau^2, \quad \omega = 1 - \tau x.$$

Напряжения $\sigma_{yy}^{\gamma}(x)$ представим в виде

$$\sigma_{yy}^{\gamma}(x) = \int_L \gamma(\tau)\,\sigma_{yy}^{u}(\tau, x)\,d\tau, \tag{10}$$

где напряжение $\sigma_{yy}^{u}(\tau, x)$, соответствующее случаю, когда в точке $x = \tau$, $y = 0$ сплошного диска помещен источник тепла единичной мощности, определяется формулой

$$\sigma_{yy}^{u}(\tau, x) = -\frac{H}{\pi}\left[\ln\left|\frac{\tau - x}{\omega}\right| + \frac{1}{2}M(\tau, x)\right], \quad M(\tau, x) = \frac{g}{\omega}\left(2 - \omega + \frac{g}{\omega}\right) \tag{11}$$

$\left(H = \frac{\alpha_t E}{2(1-\nu)}\right.$ для плоской деформации и $H = \frac{\alpha_t E}{2}$ для плоского напряженного состояния, E — модуль упругости, α_t — коэффициент линейного теплового расширения$\left.\right)$.

Использовав выражение (11) и исключив с помощью соотношения (5) логарифмическую часть ядра, формулу (10) перепишем в удобном для вычислений виде

$$\sigma_{yy}^{\gamma}(x) = -H\left[f(x) + \frac{1}{2\pi}\int_L \gamma(\tau)M(\tau, x)\,d\tau\right].$$

Удовлетворяя теперь второму условию (9) и представляя функцию $\mu(x)$ в виде

$$\mu(x) = H\left[\mu_1(x) + \frac{1}{2\pi}\int_L \gamma(\tau)\mu_2(\tau, x)\,d\tau\right], \tag{12}$$

для определения функций $\mu_1(x)$ и $\mu_2(\tau, x)$ получаем сингулярные интегральные уравнения, отличающиеся только правой частью:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu_i(\tau, \tau_0)\left[\frac{1}{\tau_0 - x} + K(\tau_0, x)\right]d\tau_0 = M_j(\tau, x), \quad j = 1, 2, \quad x \in L, \tag{13}$$

где обозначено: $\mu_1(\tau, x) \equiv \mu_1(x)$; $M_1(\tau, x) = f(x) + p(x)$; $M_2(\tau, x) = M(\tau, x)$; $\sigma_{yy}^{p}(x) = Hp(x)$. Удобство представления (12) состоит в том, что функция $\mu_2(\tau, x)$ не зависит от заданных на трещине температуры или теплового потока. Применяя к сингулярному члену соотношения (13) формулу обращения интеграла типа Коши [1] для определения функции $\mu_j(\tau, x)$ получаем уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu_j(\tau, x) = \frac{i}{X_n^{+}(x)}\left[\sum_{k=0}^{n-1} c_{jk}x^k - Q_j(\tau, x) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu_j(\tau, \tau_0)\,\Omega(\tau_0, x)\,d\tau_0\right], \tag{14}$$

где

$$Q_s(\tau, x) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{X_n^{+}(\tau_0)M_s(\tau, \tau_0)\,d\tau_0}{\tau_0 - x}, \quad s = 0, 1, 2;$$

$$Q_0(\tau, x) \equiv \Omega(\tau, x); \quad M_0(\tau, \tau_0) \equiv K(\tau, \tau_0); \quad X_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - a_k)^{1/2}(z - b_k)^{1/2}.$$

Произвольные постоянные c_{j0}, c_{j1}, $c_{j,n-1}$ определяются из условий непрерывности перемещений в вершинах трещин

$$\int_{a_k}^{b_k} \mu_j(\tau, x)\,dx = 0, \qquad k = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим случай одной трещины. При $n = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = b$ уравнения (14) после вычисления внутренних интегралов запишутся так:

$$X(x)\,\mu_j(\tau, x) - \frac{1}{\pi}\int_a^b \mu_j(\tau, \tau_0)\,\Omega(\tau_0, x)\,d\tau_0 + Q_j(\tau, x) = 0, \quad j = 1, 2, \qquad (15)$$

$$Q_2(\tau, x) = g\left[x - \varepsilon + \frac{2}{\tau}\left(1 - \frac{X_*(\tau)}{\omega}\right) + g\,\frac{\delta^2\tau + (\varepsilon - x)(1 - \varepsilon\tau)}{X_*(\tau)\,\omega^2}\right],$$

$$\Omega(\tau, x) = -1 + \tau(\varepsilon - x) + \left[X_*(\tau) - \frac{g(1 - \varepsilon\tau)}{X_*(\tau)} + \frac{\delta^2 g^2}{2X_*^3(\tau)}\right]\frac{1}{\omega} +$$

$$+ \frac{gX_*(\tau)}{\omega^2} + \frac{\delta^2 - \varepsilon g^2(\varepsilon - x)}{X_*(\tau)\,\omega^3} + (\varepsilon - x)\,\frac{g^2 - \omega^3 X_*(\tau)}{\tau\omega^3 X_*(\tau)},$$

$$X(\tau) = \sqrt{(b - \tau)(\tau - a)}, \quad X_*(\tau) = \sqrt{(1 - a\tau)(1 - b\tau)}, \quad \delta = \frac{b - a}{2}, \quad \varepsilon = \frac{b + a}{2}.$$

Решения уравнений (15) ищем в виде

$$\mu_j(\tau, x) = \frac{\delta\mu_j^0(\tau, x)}{X(x)}, \quad \mu_j^0(\tau, x) = \frac{d_{j0}}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} d_{jk} T_k\left(\frac{x - \varepsilon}{\delta}\right),$$

где $T_k(x)$ — полиномы Чебышева I рода; $d_{1k} = \frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N} \mu_1^0(x_m)\cos k\theta_m$;

$$x_m = \varepsilon + \delta\cos\theta_m; \quad \theta_m = \frac{2m - 1}{2N}\pi; \quad d_{2k} = \frac{D_{k0}}{2} + \sum_{\nu=1}^{N-1} D_{k\nu} T_\nu\left(\frac{\tau - \varepsilon}{\delta}\right);$$

$$D_{k\nu} = \frac{4}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\cos k\theta_m \sum_{p=1}^{N}\mu_2^0(\tau_p, x_m)\cos\nu\theta_p; \quad \tau_p = \varepsilon + \delta\cos\theta_p.$$

Тогда значения $\mu_{jpm}^0 = \mu_j^0(\tau_p, x_m)$ определяются из систем уравнений

$$\mu_{jpm}^0 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mu_{jpk}^0\,\Omega(\tau_k, x_m) + Q_j(\tau_p, x_m) = 0, \quad m, p = \overline{1, N}.$$

Коэффициенты интенсивности нормальных напряжений определим по формулам

$$K_{1c} = \mp\sqrt{\frac{\pi R}{\delta}}\lim_{x \to c} X(x)\,\mu(x) = \mp\sqrt{\pi R\delta}\;\mu_0(c), \quad c = a, b, \qquad (16)$$

где верхний знак соответствует правому, а нижний — левому концам трещины.

Для центральной трещины ($b = -a = \delta$) формулу коэффициента интенсивности напряжений можно записать так:

$$K_1 = \delta RH\int_{-1}^{1}\{K_1^*(s)\,]p(s) + f(s)] + K_2^*(s)\,\gamma(s)\}\,ds, \qquad (17)$$

где $K_1^*(s)$ — коэффициент интенсивности нормальных напряжений, вызванных двумя сосредоточенными единичными силами, приложенными к берегам трещины в точке $x = \delta s$ и направленными в противоположные стороны, который определяется [2] так:

$$K_1^*(s) = \sqrt{\frac{1-s^2}{\pi R\delta}}\left[\frac{1}{1\mp s} + 3\delta^2 + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}s - 2s^2\right)\delta^4 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{4} \mp 5s + 5s^2 \mp \frac{5}{2}s^3\right)\delta^6 + \left(\frac{9}{8} \pm \frac{39}{4}s - \frac{15}{8}s^2 \pm \frac{75}{8}s^3 - \frac{9}{2}s^4\right)\delta^8\right], \quad (18)$$
$$K_2^*(s) = \frac{\delta}{2\pi}\int_{-1}^{1} K_1^*(\sigma)\, M(s, \sigma)\, d\sigma.$$

Разлагая в последней формуле функцию $M(s, \sigma)$ в ряд по полудлине трещины δ $(\delta < 1)$

$$M(s, \sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} M_m(s, \sigma)\,\delta^{2m}, \quad M_0 = 2, \quad M_1(s, \sigma) = 4s\sigma - 3s^2,$$
$$M_m(s, \sigma) = (m+3)\, s^m\sigma^m - 2(m+1)\, s^{m+1}\sigma^{m-1} + (m-1)\, s^{m+2}\sigma^{m-2}, \qquad m \geqslant 2,$$

и вычисляя интеграл, получаем

$$K_2^*(s) = \sqrt{\frac{\delta}{\pi R}}\left[1 + \left(\frac{3}{2} \pm s - \frac{3}{2}s^2\right)\delta^2 + \left(-1 \mp \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)s^2\delta^4 + \right.$$
$$+ \left(\frac{3}{4} \pm \frac{9}{16}s + \frac{15}{16}s^2 \pm \frac{9}{8}s^3 - \frac{5}{4}s^4 \pm \frac{1}{2}s^5\right)\delta^6 +$$
$$\left. + \left(\frac{3}{64} \mp \frac{25}{16}s - \frac{41}{32}s^2 \mp \frac{27}{16}s^3 - \frac{3}{16}s^4 \mp \frac{15}{8}s^5 + \frac{3}{4}s^6\right)\delta^8\right]. \quad (19)$$

Найдем коэффициенты интенсивности напряжений в диске с центральной трещиной, на берегах которой заданы температура $f_0(x) = \lambda_0 T_0$ и нормальные напряжения $\sigma_{yy}^p(x) = -\lambda_p H T_0$, а на границе диска поддерживается температура $t_c = \lambda_c T_0$ (здесь λ_0, λ_p, λ_c — безразмерные параметры). В этом случае плотность источников тепла

$$\gamma(x) = -\frac{\lambda_t T_0 (1+\delta)^2}{2K(r)\sqrt{(\delta^2 - x^2)(1 - \delta^2 x^2)}}, \quad r = \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2, \quad \lambda_t = \lambda_0 - \lambda_c, \quad (20)$$

где $K(r)$ — полный эллиптический интеграл I рода.

Подставляя выражения (18) — (20) в формулу (17), находим коэффициент интенсивности напряжений в диске с центральной трещиной (ввиду симметрии $K_{1a} = K_{1b} = K_1$)

$$K_1 = HT_0\sqrt{R}\,[(\lambda_p - \lambda_t)\, K_{11} + \lambda_t K_{12}], \quad (21)$$

где

$$K_{11} = \sqrt{\pi\delta}\left(1 + \frac{3}{2}\delta^2 + \frac{3}{4}\delta^6 + \frac{3}{64}\delta^8\right);$$
$$K_{12} = \frac{\sqrt{\pi\delta}\,(1+\delta)^2}{2K(r)}\left(1 + \frac{3}{4}\delta^2 - \frac{1}{16}\delta^4 + \frac{27}{32}\delta^6 - \frac{51}{128}\delta^8\right). \quad (22)$$

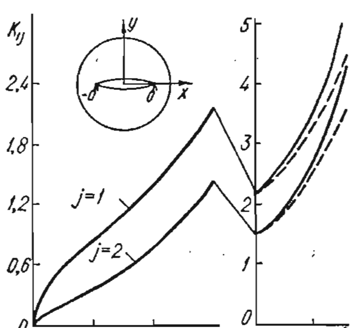

Рис. 2

На рис. 2 приведены зависимости коэффициентов K_{1j} $(j = 1, 2)$ от безразмерной полудлины трещины δ. Сплошные линии соответствуют значениям K_{1j}, полученным в результате численного решения на ЭВМ «Минск-32» уравнения (15) при $N = 30$, а пунктирные — приближенным значениям, полученным по формулам (22). Сопоставление приведенных графиков показывает, что формулы (22) с удовлетворительной для практики точностью (погрешность менее 5%) можно применять, если $\delta < 0{,}8$. Используя полученные зависимости, из условия $K_1 = K_{IC}$ можно определить критические значения параметров λ_t^* или λ_p^*. Из анализа полученных результатов следует, что при надлежащем выборе температурного поля в нагруженной конструкции можно снизить интенсивность напряжений в вершине трещины до допустимой для данного материала нормы, а следовательно, предупредить распространение трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958. 543 с.
2. *Крестин Г. С., Либацкий Л. Л., Ярема С. Я.* Напряженное состояние диска с диаметральной трещиной.— ФХММ, 1972, № 2, с. 69—74.
3. *Либацкий Л. Л.* Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинах с трещинами.— ФХММ, 1965, № 4, с. 410—418.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.IX 1976 г.

УДК 621.785.2 : 621.791.053

Л. П. Беседина, Н. Н. Тимошенко

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ОБРАБОТКИ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Одним из применяемых в инженерной практике способов снятия остаточных сварочных напряжений в элементах тонкостенных конструкций и приборов является низкотемпературная обработка, обеспечивающая понижение уровня остаточных напряжений за счет создания дополнительных термопластических деформаций. Методика построения оптимальных режимов низкотемпературной обработки тонких сварных пластин предложена в работе [2]. В данной статье определены температурные поля низкотемпературной обработки пологой сферической оболочки, приводящей к оптимальному снятию остаточных сварочных напряжений.

Рассмотрим сварную пологую сферическую оболочку радиуса R, толщины $2h$ с круговым отверстием радиуса r_0, отнесенную к полярной системе координат $\rho = \frac{r}{R}$ и θ (r, θ — радиальная и кольцевая координаты), в которой имеются остаточные напряжения, обусловленные осесимметрическими остаточными деформациями $e_r^{(0)}(\rho)$, $e_\theta^{(0)}(\rho)$ в окрестности кольцевого сварного шва радиуса $r = r^* > r_0$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда снятие остаточных напряжений осуществляется путем создания дополнительных термопластических деформаций $e_\theta^{(p)}(\rho)$, $e_r^{(p)}(\rho) = ke_\theta^{(p)}(\rho)$ в области $\rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, образование которых происходит при близком к безмоментному напряженном состоянии в области пластического деформирования оболочки.

Примем, что материал оболочки идеально пластический и удовлетворяет условию текучести Мизеса [5]. Это условие для близкого к безмоментному напряженного состояния оболочки характеризуется эллипсом текучести Мизеса в переменных N_r, N_θ и при пластическом деформировании в окрестности некоторой точки (N_{r0}, $N_{\theta 0}$) может быть аппроксимировано прямой

$$kN_r + N_\theta - 2hB = 0. \qquad (1)$$

Здесь N_r, N_θ — радиальные и кольцевые усилия; $k = \frac{2N_{r0} - N_{\theta 0}}{2N_{\theta 0} - N_{r0}}$; $B = \frac{4h\sigma_s^2}{2N_{\theta 0} - N_{r0}}$; σ_s — предел текучести.

Из закона пластического течения, ассоциированного с условием пластичности (1), находим

$$e_r^{(p)}(\rho, \tau) = k\lambda(\rho, \tau), \quad e_\theta^{(p)}(\rho, \tau) = \lambda(\rho, \tau). \qquad (2)$$