

Параметры монокристалла определены с помощью привязки к точке переключения. Из рисунка видно, что экспериментальные результаты хорошо согласуются с результатами, которые дает предложенная модель. Несколько заниженные значения теоретических кривых в начале их хода по сравнению с экспериментальными могут быть объяснены принятой аппроксимацией донорной зоны  $N_D$ -кратно вырожденным уровнем. Кроме того, в процессе лазерной формовки образуется сильно дефектный канал  $VO_2$  с несколькими донорными зонами, которые лежат ниже рассматриваемой нами зоны и дают суммарный вклад в проводимость за счет термически активированных междуполосных переходов. Следует отметить, что в начале кривой ВАХ при малых напряженностях электрического поля экранирование играет незначительную роль. При дальнейшем возрастании напряженности поля  $F$  эти зоны дают переключения в еще более низкоомное состояние.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. Н., Аронов А. Г., Чудновский Ф. А. Фазовый переход в электрическом поле в  $V_2O_3$  и эффект переключения.— Изв. АН СССР. ФТТ, 1970, № 12, с. 1557—1561.
2. Борисов Б. С., Корецкая С. Т., Мокеров В. Г. и др. Электрические и оптические свойства  $VO_2$  при фазовом переходе полупроводник — металл.— Изв. АН СССР. ФТТ, 1970, № 12, с. 2209—2213.
3. Ваарух М. В. Частично ионизованное состояние водорода. Ч. 1. Препринт ИТФ, 76—46 Р. К., 1976. 26 с.
4. Валиев К. А., Копяев Ю. В., Мокеров В. Г. и др. Переход металл — изолятор в  $V_2O_3$  в сильном электрическом поле.— Письма в ЖЭТФ, 1970, № 12, с. 18—23.
5. Валиев К. А., Копяев Ю. В., Мокеров В. Г., Раков А. В. Оптические и электрические свойства  $VO_2$  в сильном электрическом поле.— Изв. АН СССР. ФТТ, 1970, № 13, с. 421—427.
6. Огрин Ю. Ф., Кунькова З. Э., Абдуллаев А. А. Эффект переключения в кристаллах пятиокси ванадия.— Микроэлектроника, 1973, № 2, с. 559—561.
7. Огрин Ю. Ф., Сербинов И. А., Рябова Л. А., Елинсон М. И. Эффект памяти в поликристаллических пленках  $V_2O_5$ .— Микроэлектроника, 1974, № 3, с. 556—557.
8. Сандомирский В. Б., Суханов А. А., Ждан А. Ф. Феноменологическая теория концентрации неустойчивости в полупроводниках.— ЖЭТФ, 1970, № 58, с. 1683—1689.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР  
Львовский университет

Поступила в редколлегию  
25.IX 1976 г.

УДК 536.21

А. П. Слесаренко, А. Ф. Ракова

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ УГЛОБРАЗНОГО СЕЧЕНИЯ С ИЗВЕСТНЫМИ ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РЕГИОНАЛЬНО-СТРУКТУРНЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим задачу о плоском распределении температуры в призматическом углообразном теле (рис. 1, а, 2, а) при условии, что длина стенок уголка бесконечно велика, температура наружных поверхностей поддерживается равной  $1000^\circ\text{C}$ , а внутренних —  $0^\circ\text{C}$ . Определение температурного поля в теле для случая, представленного на рис. 1, а, сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u|_{S_0} = 0, \quad u|_{S_1} = 1000, \quad (2)$$

где  $u = u^* u_0^{-1}$ ;  $u_0 = 1^\circ\text{C}$ .

Учитывая симметрию распределения температурного поля, решаем задачу для области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , представленной на рис. 1, б. В этом случае на поверхности  $S_3$  добавляется еще условие

$$\frac{\partial u}{\partial v_3} \Big|_{S_3} = 0, \quad (3)$$

где  $v_3$  — направление внутренней нормали к поверхности  $S_3$ .

Для решения задачи (1) — (3) применим регионально-структурный метод [5]. Структуру решения задачи представим в виде

$$u = \begin{cases} u_1, & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2, & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (4)$$

где  $u_1 = \eta + v_1$ ;  $u_2 = \eta + v_2$ ;  $\eta = 1000(1 - x/d)$ . При этом на границе контакта  $S_2$  регионов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  должны выполняться условия сопряжения

$$u_1|_{S_2} = u_2|_{S_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{S_2} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{S_2}. \quad (5)$$

Для функций  $v_1$  и  $v_2$  получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0,$$

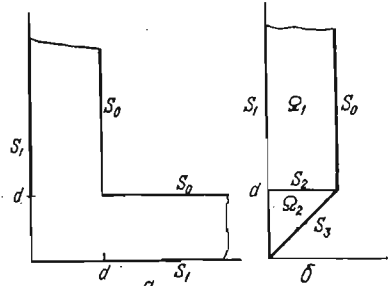


Рис. 1

(6)

$$v_1|_{S_0} = 0, \quad v_1|_{S_1} = 0, \quad (7)$$

$$v_1|_{S_2} = v_2|_{S_2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{S_2} = \frac{\partial v_2}{\partial y} \Big|_{S_2}, \quad (8)$$

$$v_2|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial v_3} \Big|_{S_3} = - \frac{\partial \eta}{\partial v_3} \Big|_{S_3}. \quad (9)$$

Функция  $v_1$ , точно удовлетворяющая уравнению (6) и граничному условию (7), имеет вид

$$v_1 = \sum_{i=1}^n C_i^* \sin(i\pi x/d) \exp(-i\pi y/d). \quad (10)$$

Функцию  $v_2$ , точно удовлетворяющую условиям (8) и (9), согласно [5], представим в виде

$$v_2 = \frac{v_1 \omega_1 \omega_3^2 + (\Phi + \omega_3 f) \omega_1 \omega_2^2}{\omega_1 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_1 \omega_2^2}, \quad (11)$$

где  $f = - \frac{\partial \eta}{\partial v_3} \Big|_{S_3}$ , а функции  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  удовлетворяют условиям [4]

$$\begin{aligned} \omega_k|_{S_k} &= 0, \quad \omega_k > 0, \quad (x, y) \in \Omega_2 \quad (k = 1, 2), \\ \omega_3|_{S_3} &= 0, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial v_3} \Big|_{S_3} = 1, \quad \omega_3 > 0, \quad (x, y) \in \Omega_2 \end{aligned} \quad (12)$$

и имеют вид

$$\omega_1 = x, \quad \omega_2 = d - y, \quad \omega_3 = (y - x)/\sqrt{2}.$$

В выражении (11) функцию  $\Phi$  с учетом симметрии представим следующим образом:

$$\Phi = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k B_{ij}^* (x^i y^{i-j} + y^j x^{i-j}),$$

где  $k = \text{entier}(i/2)$ .

Таблица 1

$C_1$	0,0002850 0,0002910	$B_{00}$	0,0000004 0,0000040	$B_{51}$	-0,0063310	$B_{90}$	0,0040417
$C_2$	-0,0016698 -0,0019104	$B_{10}$	0,0000513 0,0001377	$B_{52}$	0,0000653	$B_{91}$	-0,0052285
$C_3$	0,0100785 0,0164189	$B_{20}$	0,0000238 -0,0004039	$B_{60}$	-0,0071381	$B_{92}$	-0,0054696
$C_4$	-0,0353771 -0,0935456	$B_{21}$	-0,0000920 -0,0004233	$B_{61}$	0,0053722	$B_{93}$	0,0103321
$C_5$	0,0595495 0,4345217	$B_{30}$	0,0000148 0,0016873	$B_{62}$	0,0129717	$B_{94}$	0,0138591
$C_6$	-0,0372749 -1,4821092	$B_{31}$	0,0064400 0,1697255	$B_{63}$	0,0008249	$B_{90}$	-0,0009014
$C_7$	3,3190660	$B_{40}$	-0,0000321 -0,0051776	$B_{70}$	-0,0015211	$B_{91}$	-0,0018349
$C_8$	-4,5288134	$B_{41}$	0,0000519 -0,0003592	$B_{71}$	0,0062186	$B_{92}$	0,0113432
$C_9$	3,3785038	$B_{42}$	-0,0000822 -0,0012927	$B_{72}$	-0,0123789	$B_{93}$	-0,0088934
$C_{10}$	-1,0438258	$B_{50}$	0,0094616	$B_{73}$	-0,0161723	$B_{94}$	-0,0044881

Таблица 2

$u$	$y$							
	$d/4$	$d/2$	$3d/4$	$d$	$5d/4$	$3d/2$	$2d$	$3d$
$u^+(d/4, y)$	950,90	902,01	855,20	825,60	785,28	768,24	753,98	751,73
$u^-(d/4, y)$	950,83	901,87	854,80	803,80	785,24	768,13	753,96	751,72
$u_B(d/4, y)$	950	899	851	809	782	766	754	751
$u_{15}(d/4, y)$	949,05	903,58	852,19	811,61	783,77	766,81	753,71	750,16
$u_{40}(d/4, y)$	946,53	898,63	856,46	812,24	784,01	767,03	753,78	750,17
$u^+(d/2, y)$	902,01	802,50	703,90	626,40	558,53	527,40	505,74	502,45
$u^-(d/2, y)$	901,87	802,28	703,40	608,30	558,39	527,28	505,70	502,43
$u_B(d/2, y)$	899	797	694	603	551	525	507	502
$u_{15}(d/2, y)$	903,58	799,83	698,33	615,13	555,39	525,53	505,32	500,23
$u_{40}(d/2, y)$	898,63	801,31	697,59	613,15	556,09	526,02	505,43	500,23
$u^+(3d/4, y)$	855,20	703,90	542,20	405,70	302,64	271,81	254,13	251,73
$u^-(3d/4, y)$	854,80	703,40	541,60	383,90	302,35	271,71	254,11	251,72
$u_B(3d/4, y)$	851	694	525	356	294	270	255	251
$u_{15}(3d/4, y)$	852,19	698,33	533,14	373,97	296,74	269,51	253,82	250,16
$u_{40}(3d/4, y)$	856,46	697,59	536,50	383,40	298,84	270,11	253,91	250,17

Для определения коэффициентов  $C_i^*$  и  $B_{ij}^*$  применяем метод Бубнова — Галеркина [2]. Так как  $\Delta v_i = 0$ , интегрирование при вычислении квадратур системы Бубнова — Галеркина производится только по области  $\Omega_2$ . В табл. 1 приведены значения коэффициентов  $C_i = C_i^* \cdot 10^{-7}$  и  $B_{ij} = B_{ij}^* \times 10^{-7}$  при  $n = 6$ ,  $p = 9$  (верхняя строка) и  $n = 10$ ,  $p = 30$ , где  $p$  — число

коэффициентов  $B_{ij}$ . В табл. 2 приведены данные для температуры, полученные в работах [3] (с избытком  $u^+$  и с недостатком  $u^-$ ), [1] (посредством метода элементарных балансов  $u_B$ ) и по формуле (4) при  $n = 6, p = 9$  ( $u_{16}$ ) и  $n = 10, p = 30$  ( $u_{40}$ ).

Пусть для предыдущей задачи поперечное сечение призматического тела имеет вид, представленный на рис. 2, а. Как и ранее, задачу решаем для области, представленной на рис. 2, б. Структуру решения задачи представляем в виде

$$u = \begin{cases} u_1, & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2, & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (13)$$

где  $u_1 = \eta + v_1$ ;  $\eta = 1000(1 - x/d)$ . Для функций  $u_1$  и  $u_2$  получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad (14)$$

$$u_1|_{S_0} = 0, \quad u_1|_{S_1} = 1000, \quad (15)$$

$$u_1|_{S_2} = u_2|_{S_2}, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{S_2} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{S_2}, \quad (16)$$

$$u_2|_{S_1} = 1000, \quad u_2|_{S_4} = 1000, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial v_3} \right|_{S_3} = 0. \quad (17)$$

Учитывая результаты работы [5], функцию  $u_2$  представляем в виде

$$u_2 = \frac{u_1 \omega_1 \omega_3^2 + \Phi \omega_2^2 \omega_{14} + 1000 \omega_2^2 \omega_3^2}{\omega_1 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_{14} + \omega_2^2 \omega_3^2},$$

где  $\omega_3 = y - x$ ;  $\omega_4 = x + y - \beta$ ;  $\omega_{14} = \omega_1 + \omega_4 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_4^2}$ . Функции  $v_1$ ,  $\Phi$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — те же, что и в предыдущем случае.

Значения  $u(x, y)$ , вычисленные по формуле (13) при  $\beta = 0,35d$ ,  $n = 6, p = 9$  и  $n = 10, p = 30$ , приведены в табл. 3.

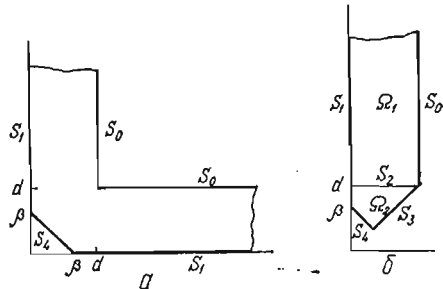


Рис. 2

Таблица 3

u	y							
	d/4	d/2	3d/4	d	5d/4	3d/2	2d	3d
$u_{15}(d/4, y)$	961,31	907,76	852,89	812,48	783,90	766,79	753,91	750,16
$u_{40}(d/4, y)$	974,68	908,50	856,35	814,80	784,87	767,38	753,85	750,17
$u_{15}(d/2, y)$	907,76	802,31	697,36	615,22	551,76	525,41	505,30	500,23
$u_{40}(d/2, y)$	908,50	803,68	705,90	614,40	570,03	526,49	505,53	500,24
$u_{15}(3d/4, y)$	852,89	697,36	530,24	371,23	296,12	269,33	253,80	250,16
$u_{40}(3d/4, y)$	856,35	705,90	544,18	385,60	299,65	270,05	253,98	250,17

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ваничев А. П. Приближенный метод решения задач теплопроводности в твердых телах. — Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук, 1946, с. 1767—1775.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962. 345 с.
3. Минасян Р. С. Об одном решении задачи Дирихле для некоторых полигональных областей. — ДАН АрмССР, 1956, 22, № 5, с. 193—202.

4. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. К., «Наук. думка», 1974. 259 с.  
 5. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в крайних задачах. К., «Наук. думка», 1976. 240 с.

Институт проблем  
 машиностроения АН УССР

Поступила в редколлегию  
 26.III 1976 г.

УДК 539.377

Г. С. Кит, М. Г. Кривцун

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОГО ДИСКА С ТРЕЩИНАМИ,  
 НА БЕРЕГАХ КОТОРЫХ ЗАДАНЫ ТЕМПЕРАТУРА  
 ИЛИ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК**

Рассмотрим упругий изотропный диск радиусом  $R$  и единичной толщины. Декартовы и полярные координаты комплексного переменного  $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$  будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу диска  $R$  (рис. 1). Обозначим через  $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$  совокупность отрезков  $L_k = [a_k, b_k]$  оси  $Ox$ , не имеющих общих точек и не выходящих на обвод диска.

Пусть в теплоизолированном с боковых поверхностей сплошном диске задано симметричное относительно оси  $Ox$  стационарное температурное поле  $t_0(x, y)$ , а на обводе поддерживается заданная температура  $t_0(1, \theta)$ . Допустим, что по отрезкам  $L_k$  этой оси проведены разрезы, на берегах которых поддерживается заданная температура  $f_0(x)$  или тепловой поток  $q(x)$ , направленный в противоположные стороны по нормали к трещине.

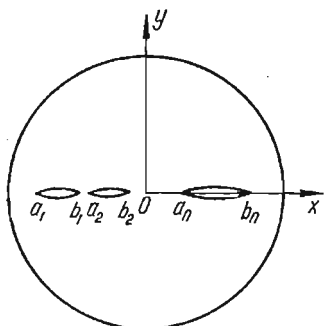


Рис. 1

Если функцию  $T(x, y)$ , описывающую распределение температуры в диске с трещинами, представить в виде

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y), \quad (1)$$

то для определения неизвестной функции  $t(x, y)$  необходимо решить уравнение Лапласа  $\Delta t = 0$

при граничных условиях

$$t(1, \theta) = 0, \quad (2)$$

$$t(x, \pm 0) = f(x) \text{ или } \lambda \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^\pm = \mp q(x), \quad x \in L, \quad (3)$$

где  $f(x) = f_0(x) - t_0(x, 0)$ ,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности тела.

Будем искать температуру  $t(x, y)$  в виде потенциала простого слоя

$$t(x, y) = \operatorname{Re} F(z), \quad F(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \gamma(\tau) \ln \frac{\tau - z}{1 - \tau z} d\tau, \quad (4)$$

что соответствует размещению на  $L$  источников тепла с неизвестной плотностью  $\gamma(x)$ . Определенная таким образом функция  $t(x, y)$  является гармонической и удовлетворяет граничному условию (2). Из граничного условия (3) для определения плотности источников тепла получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_L \gamma(\tau) \ln \left| \frac{\tau - x}{1 - \tau x} \right| d\tau = f(x), \quad x \in L, \quad (5)$$