

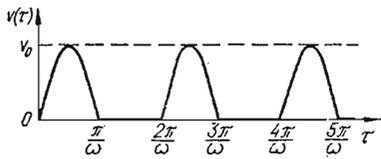
$$Q_{1,2} = \frac{(X+D)^2}{\rho_+^6} \pm \frac{(X-D)^2}{\rho_-^6}; \quad P_{1,2} = \frac{z^+}{\rho_+^6} \pm \frac{z^-}{\rho_-^6}; \quad R_{1,2} = \frac{X+D}{\rho_+^6} \pm \frac{X-D}{\rho_-^6};$$

$$W = \rho_+^{-6} - \rho_-^{-6}.$$

Пусть  $v(\tau)$  изменяется по закону

$$v(\tau) = v_0 \left[ \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega \tau - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega\tau)}{(2n-1)(2n+1)} \right],$$

изображенному на рисунке ( $v_0$  — начальная скорость,  $\omega$  — частота). Тогда



$$H = V_0 \left[ \frac{\zeta}{\pi} + \frac{1}{2\chi} (1 - \cos \chi \zeta) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\chi\zeta)}{(2n-1)2n(2n+1)} \right],$$

где

$$V_0 = \frac{v_0 \delta}{a}, \quad \chi = \frac{\omega \delta^2}{a}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Подстриган Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., «Наук. думка», 1972. 308 с.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., «Наука», 1974. 542 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высш. школа», 1965. 465 с.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
24.IX 1976 г.

УДК 539.377

О. Н. Шаблий, М. С. Михалишин

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ ОСТАТОЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В РЕЗУЛЬТАТЕ НАПЛАВКИ ТОНКОЙ ПОЛОГОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Одним из наиболее эффективных способов повышения срока службы рабочих деталей машин является наплавка их более износостойкими материалами с помощью индукционного нагрева токами высокой частоты. Однако в ряде случаев после наплавки детали значительно изменяют свою форму и в них возникают большие остаточные напряжения, что не позволяет нормально их эксплуатировать. В связи с этим необходимо проектировать такие электроиндукторы, которые позволяли бы производить наплавку легко поддающихся короблению деталей, а также уметь находить поля возникающих в результате этого остаточных перемещений, деформаций и напряжений.

В данной работе найдены остаточные перемещения, деформации и напряжения, возникающие в результате индукционной наплавки ножей ботвоуборочной машины «БМ-6». Для проведения наплавки круглых в плане конусообразных тонких дисков предложен круговой односторонний индуктор, определена необходимая для обеспечения наплавки мощность установки ТВЧ и найдены электромагнитное и температурное поля, которые создает такой индуктор.

Рассмотрим тонкую пологую кольцевую коническую оболочку толщиной  $2h$  с радиусами внутреннего и внешнего контуров  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 1). Отнесем оболочку к цилиндрической системе координат  $r, \theta, Z$  и введем следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{r}{R_2}, \quad z = \frac{Z}{h}, \quad u = \frac{U}{R_2}, \quad w = \frac{W}{h}; \quad (1)$$

где  $U, W$  — перемещения точек срединной поверхности оболочки в радиальном и поперечном направлениях.

Пусть заземленная на внутреннем контуре и свободная на внешнем оболочка подвергается кратковременному действию осесимметричного постоянного по толщине температурного поля  $T_1(r)$ . В результате интенсивного неравномерного нагрева в оболочке возникают области необратимых пластических деформаций, вследствие чего после полного остывания конструкции образуются остаточные напряжения и деформации.

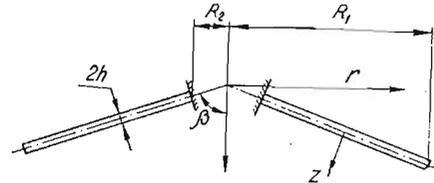


Рис. 1

Предположим, что материал оболочки идеально упруго-пластический, а модуль упругости и предел текучести являются функциями температуры, т. е.

$$E(T) = E_0 \varphi(T), \quad \sigma_s(T) = \sigma_0 \psi(T) \quad (\varphi(T_0) = \psi(T_0) = 1), \quad (2)$$

где  $E_0$  и  $\sigma_0$  — значения модуля упругости и предела текучести при  $T = T_0$ ;  $T_0$  — температура, при которой определяются остаточные напряжения и деформации. Предположим также, что нагружение оболочки простое и, значит, справедлива теория малых упруго-пластических деформаций [4]. Для определения остаточных напряжений и деформаций, которые возникли в результате пластического деформирования, можно использовать теоремы о разгрузке [4—6].

Согласно первой теореме о разгрузке, которая справедлива в том случае, если в процессе разгрузки не возникают вторичные пластические деформации, можно записать [6]

$$\sigma_{ij} = \frac{E_0}{E(T_1)} \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^0. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров остаточных напряжений и деформаций;  $\sigma_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^1$  — напряжения и деформации, существовавшие в теле в момент начала разгрузки;  $\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^0$  — напряжения и деформации, являющиеся решением задачи теории упругости для чисто тепловой деформации  $\varepsilon_T^0 = \varepsilon_T - \alpha(T_1 - T_0)$  ( $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения). Модуль упругости при решении этой термоупругой задачи должен соответствовать температурному полю  $T_0$ , при котором вычисляются остаточные напряжения и деформации. Индексом «1» здесь и далее обозначены величины, взятые в момент начала разгрузки.

Когда материал конструкции в процессе разгрузки (температурное поле меняется от  $T_1(r)$  до  $T_0$ ) вторично выходит за пределы упругости, справедлива вторая теорема [6]. Остаточные напряжения и деформации на основании этой теоремы определяются по формулам (3), в которых компоненты тензоров  $\sigma_{ij}^0$  и  $\varepsilon_{ij}^0$  являются уже решением термоупруго-пластической задачи для некоторого фиктивного тела и чисто тепловой деформации  $\varepsilon_T^0$ . Фиктивное тело отличается от рассматриваемого тем, что предел текучести его определяется по формуле

$$\sigma_s^1(T_1) = \sigma_0 \left[ \left( \frac{E_0}{E(T_1)} - 1 \right) \psi(T_1) + 2 \right]. \quad (4)$$

Таким образом, в наиболее общем случае для определения остаточных напряжений и деформаций необходимо найти решение двух термоупруго-пластических задач для чисто тепловой деформации  $\epsilon_T = \alpha (T_1 - T^0)$  ( $T^0$  — первоначальная температура оболочки), если модуль упругости материала  $E(T_1)$  и предел текучести  $\sigma_s(T_1)$ , и для чисто тепловой деформации  $\epsilon_T^0$ , если модуль упругости материала  $E(T_0) = E_0$  и предел текучести  $\sigma_s^1(T_1)$ . Заметим, что если при решении второй задачи окажется, что критерий текучести нигде в области оболочки не выполняется, то полученное решение будет решением соответствующей термоупругой задачи и выполняются условия первой теоремы о разгрузке.

Найдем полную систему уравнений, необходимых для решения сформулированных выше задач.

Деформации в произвольной точке оболочки, найденные в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа — Лява, будут такими:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{10} - zh\kappa_1; \quad \epsilon_2 = \epsilon_{20} - zh\kappa_2. \quad (5)$$

Здесь  $\epsilon_{10}$ ,  $\epsilon_{20}$  — деформации и  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  — изменения кривизны срединной поверхности оболочки, которые для полой конической оболочки в случае осесимметричного нагружения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{10} &= \frac{du}{dx}, \quad \epsilon_{20} = \frac{u}{x} - \left(\frac{h}{R_2}\right)^2 \frac{n^2}{2} \frac{w}{x}, \\ \kappa_1 &= \frac{h}{R_2^2} \frac{d^2w}{dx^2}, \quad \kappa_2 = \frac{h}{R_2^2} \frac{1}{x} \frac{dw}{dx}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $n^2 = \frac{2R_2}{h} \operatorname{ctg} \beta$ ;  $\beta$  — половина угла раствора оболочки.

Уравнения равновесия элемента оболочки, найденные на основании принципа возможных перемещений, записываются так:

$$\frac{d}{dx}(xt_1) = t_2, \quad \frac{d}{dx}(xm_1) - m_2 + n^2xt_1 = 0. \quad (7)$$

Здесь обозначено:  $t_j = \frac{T_j}{2\sigma_\phi h}$ ;  $m_j = \frac{M_j}{\sigma_\phi h^2}$  ( $j = 1, 2$ );  $T_j, M_j$  — интенсивности усилий и моментов в радиальном ( $j = 1$ ) и кольцевом ( $j = 2$ ) направлениях.

Граничные условия задачи следующие:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x = b = \frac{R_1}{R_2}, \quad (8)$$

$$t_1 = 0, \quad m_1 = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x = 1. \quad (9)$$

Граничное условие для перерезывающей силы  $Q$  удовлетворяется автоматически.

В качестве физических соотношений при решении упруго-пластической задачи необходимо использовать соотношения закона Гука в упругих областях и соотношения теории малых упруго-пластических деформаций в упруго-пластических и пластических областях. Однако из-за больших трудностей, возникающих в связи с тем, что неизвестно распределение упругих и пластических областей в оболочке, будем пользоваться приближенным методом переменных параметров упругости [2, 4].

Зависимость закона Гука для случая плоского напряженного состояния в обобщенных напряжениях и деформациях имеет вид

$$\epsilon_{10} = \frac{\sigma_n}{E^*} (t_1 - \nu^* t_2) + \alpha T, \quad \epsilon_{20} = \frac{\sigma_0}{E^*} (t_2 - \nu^* t_1) + \alpha T, \quad (10)$$

$$\gamma_1 = h\kappa_1 = -\frac{3\sigma_0}{2E^*} (m_1 - \nu^* m_2), \quad \gamma_2 = h\kappa_2 = -\frac{3\sigma_0}{2E^*} (m_2 - \nu^* m_1),$$

где  $E^*$ ,  $\nu^*$  — переменные модули упругости.

Подставляя соотношения (10) в уравнения совместности деформаций, которые вытекают из зависимостей (6), получаем еще два разрешающие

уравнения. Присоединяя к этим уравнениям уравнения равновесия, а также уравнение для определения прогибов, получающееся из выражений для  $\kappa_2$ , окончательно находим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dt_1}{dx} &= \frac{1}{x} \left[ \bar{t}_2 - (1 - \nu^*) t_1 - \frac{E^*}{\sigma_0} \alpha T \right], \\ \frac{dt_2}{dx} &= \frac{\bar{t}_2}{E^*} \frac{dE^*}{dx} - \frac{(1 + \nu^*)}{x} \left[ \bar{t}_2 - (1 - \nu^*) t_1 - \frac{E^*}{\sigma_0} \alpha T \right] + \frac{3}{4} n^2 \bar{m}_2, \\ \frac{dm_1}{dx} &= \frac{1}{x} [\bar{m}_2 - (1 - \nu^*) m_1] - n^2 t_1, \\ \frac{d\bar{m}_2}{dx} &= \frac{\bar{m}_2}{E^*} \frac{dE^*}{dx} - \frac{1 + \nu^*}{x} [\bar{m}_2 - (1 - \nu^*) m_1], \\ \frac{dw}{dx} &= - \frac{3\sigma_0}{2E^*} \left( \frac{R_2}{h} \right)^2 \bar{x} m_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\bar{t}_2 = t_2 - \nu^* t_1 + \frac{E^*}{\sigma_0} \alpha T, \quad \bar{m}_2 = m_2 - \nu^* m_1. \quad (12)$$

Решение системы уравнений (11) должно удовлетворять таким граничным условиям:

$$\begin{aligned} \bar{t}_2 &= 0, \quad \bar{m}_2 = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x = b, \\ t_1 &= 0, \quad m_1 = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned} \quad (13)$$

При определении первого приближения решения первой задачи переменные модули упругости  $E^*$  и  $\nu^*$  необходимо брать равными соответствующим величинам для температурного поля  $T_1(x)$  и температурное поле  $T(x) = T_1(x) - T_0$ , а во второй задаче — для температуры  $T_0$  и  $T(x) = T_1(x) - T_0$ . Во втором приближении переменные модули упругости в каждой точке оболочки определяются по диаграмме деформирования материала через интенсивность деформаций в этой точке, найденную в первом приближении.

Предположим далее, что пластические деформации во всей области оболочки достаточно развиты и примем  $\nu^* = 0,5$ . Тогда для принятой нами модели тела справедливы следующие физические соотношения:  $\sigma_i = E(T) \varepsilon_i$  в упругих областях,  $\sigma_i = \sigma_s(T)$  и уравнения деформационной теории пластичности Генки в пластических областях. Новое значение переменного модуля  $E^*$  для  $(n + 1)$ -го приближения определяется по формуле

$$E_{(n+1)}^* = \frac{\sigma_s(T)}{\varepsilon_i^{(n)}}, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_i^{(n)}$  — интенсивность деформаций в данной точке, найденная в результате  $n$ -го приближения. Так как система уравнений (11) позволяет находить обобщенные напряжения и деформации, а интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $\varepsilon_i$  являются функциями координаты  $z$ , необходимо записать физические соотношения, а также формулу (14) относительно некоторых усредненных по толщине оболочки интенсивностей напряжений и деформаций, т. е. относительно интенсивностей обобщенных напряжений и деформаций.

Предположим, что напряжения по толщине оболочки распределяются по линейному закону

$$\sigma_i = \sigma_0 \left( t_i + \frac{3}{2} z m_i \right), \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

и введем следующие величины:

$$Q_i = \left( \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_i^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{E}_i = \left( \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varepsilon_i^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

которые для случая плоского напряженного состояния в предположении о чисто упругих объемных изменениях в упругих и в пластических областях имеют вид

$$Q_i = \sigma_0 \left[ t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 + \frac{3}{4} (m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$\xi_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \varepsilon_{10}^2 + \varepsilon_{10} \varepsilon_{20} + \varepsilon_{20}^2 + \frac{1}{3} (\gamma_1^2 + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2) + 3\alpha T (\alpha T - \varepsilon_{10} - \varepsilon_{20}) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Легко показать, что закон Гука и условие пластичности можно теперь записать так:

$$Q_i = E(T) \xi_i, \quad Q_i = \sigma_s(T) \quad (18)$$

и поэтому величины  $Q_i$  и  $\xi_i$  будем в дальнейшем называть интенсивностями обобщенных напряжений и деформаций.

Таким образом, переменный модуль упругости можно определять по формулам

$$E_{(n+1)}^* = \frac{\sigma_s(T_1)}{\xi_i^{(n)}} , \quad E_{(1)}^* = E(T_1), \quad (19)$$

если решается упруго-пластическая задача для действительной оболочки, и

$$E_{(n+1)}^* = \frac{\sigma_s^1(T_1)}{\xi_i^{(n)}} , \quad E_{(1)}^* = E_0, \quad (20)$$

если решается упруго-пластическая задача для оболочки из фиктивного материала. Расчет необходимо продолжать до тех пор, пока результаты в некотором приближении не будут близки к соответствующим результатам в предыдущем приближении.

Определив таким образом решение системы уравнений (11) и используя зависимости (6), (10) и (15), можно найти поля обобщенных напряжений и деформаций оболочки, напряжения в любой точке оболочки и перемещения точек срединной поверхности  $w$  и  $u$ . Интенсивности остаточных усилий, моментов и остаточные перемещения определяются так:

$$t_j = \frac{E_0}{E(T_1)} t_j^1 - t_j^0, \quad m_j = \frac{E_0}{E(T_1)} m_j^1 - m_j^0 \quad (j = 1, 2), \quad u = u^1 - u^0, \quad w = w^1 - w^0. \quad (21)$$

Индексами «1» и «0» обозначены решения тех же задач, что и выше.

Аналитическое решение краевой задачи (11), (13) даже для простых зависимостей  $E^*(x)$  и  $T(x)$  представляет большие математические трудности. Поэтому нами использован численный метод решения задачи с применением ЭВМ. Решение краевой задачи в каждом приближении приведено к решению некоторых вспомогательных задач Коши [1], каждая из которых решена по методу Рунге — Кутты. Для решения поставленной выше задачи указанным методом составлена программа на языке ФОРТРАН для ЭВМ «Минск-32».

Численные расчеты производились для следующих данных:

$$E_0 = 20\,300 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}, \quad \sigma_0 = 44 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}, \quad \alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } 1^\circ\text{C},$$

$$\varphi(T) = 1 - T(\alpha_1 + \beta_1 T), \quad \alpha_1 = 0,64 \cdot 10^{-4}, \quad \beta_1 = 0,44 \cdot 10^{-6},$$

$$\psi(T) = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}, \quad T_1 = 1500^\circ\text{C}, \quad T_0 = T^0 = 18^\circ\text{C}, \quad (22)$$

$$R_2 = 220 \text{ мм}, \quad b = 0,5, \quad \beta = 82^\circ, \quad n^2 = 61,8376, \quad 2h = 2 \text{ мм}.$$

Температурное поле, найденное в результате решения уравнений теплопроводности в случае, если распределение джоулева тепла рассчитано для пред-

ложенного индуктора, можно аппроксимировать следующим выражением:

$$T_1(x) = T_{\max} \exp[-k(x - x_1)^2], \quad T_{\max} = 1200^\circ\text{C}, \quad k = 17, \quad x_1 = 1.$$

Для получения удовлетворительной точности решения задачи понадобилось четыре приближения по методу переменных параметров упругости.

На рис. 2 показана зависимость остаточных прогибов  $W$  от радиальной координаты. Сравнение полученных результатов с аналогичными результатами, найденными экспериментальным путем, показало, что максимальное расхождение между ними на внешнем контуре оболочки составляет 8,2%. Это дает возможность утверждать, что описанный выше метод можно использовать в инженерной практике для решения подобных задач.

На рис. 3, 4 изображены графики остаточных напряжений, усилий и моментов. Остаточные напряжения достигают достаточно большой величины вблизи заземленного контура, причем наиболее опасны радиальные напряжения  $\sigma_1$ . Интенсивность безразмерного радиального момента  $m_1$  от этих напряжений максимальна при  $x = 0,65$  и достигает значения  $-0,95$ . Так как момент отрицательный, то наиболее удачной рабочей нагрузкой оболочки в процессе ее эксплуатации следует считать такую, в результате которой верхние волокна в радиальном направлении будут сжиматься, а нижние растягиваться, т. е. наиболее выгодным для  $m_1$  будет действие на контуре  $x = 1$  распределенного положительного момента.

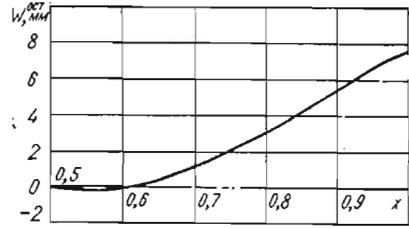


Рис. 2

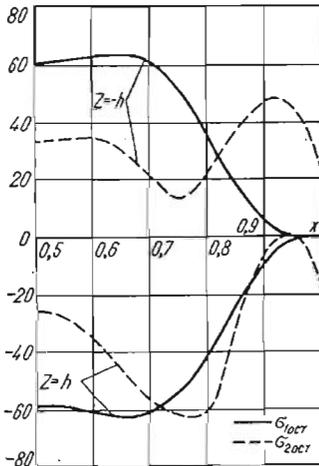


Рис. 3

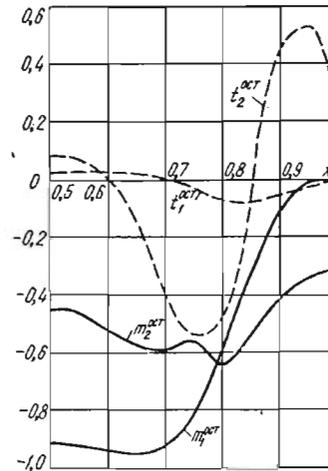


Рис. 4

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. Ч. 1. М., «Наука», 1973. 632 с.
2. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961. 368 с.
3. Генки Г. Теория пластичности. М., Изд-во иностр. лит., 1948. 452 с.
4. Ильишин А. А. Пластичность. М., Гостехиздат, 1948. 377 с.
5. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагрузках. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965. 263 с.
6. Шевченко Ю. Н. Термопластичность при переменных нагрузках. К., «Наук. думка», 1970. 287 с.

Тернопольский филиал Львовского  
политехнического института

Поступила в редколлегию  
12.X 1976 г.