

Рис. 2

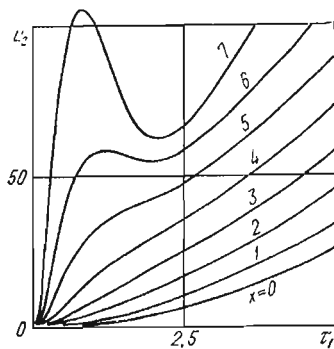


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965. 486 с.
2. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1976. 568 с.
3. Допустимые температурные напряжения и скорости прогрева (расхолаживания) толстостенных паропроводов. М., «Энергия», 1975. 104 с. Авт.: В. М. Вигака, С. В. Фальковский, А. Д. Горешник, Б. В. Машенко.
4. Вигака В. М., Горешник А. Д., Прокопенко А. Г. Расчет продолжительности прогрева длинных трубопроводов.— Наладочные и экспериментальные работы ОРГРЭС, 1970, вып. 39, с. 173—179.
5. Вигака В. М., Федоришин А. А. Оптимальный симметричный температурный режим для пластины.— ИФЖ, 1975, 28, № 5, с. 918—919.
6. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.— Л., Машгиз, 1962. 456 с.
7. Подстригач Я. С., Вигака В. М. Оптимальные режимы нагрева и расхолаживания паропроводов.— Теплоэнергетика, 1973, № 7, с. 68—73.
8. Подстригач Я. С., Вигака В. М., Прокопенко А. Г. Оптимальные температурные режимы нагрева ротора турбомашин и паропроводов.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1973, вып. 13, с. 75—80.
9. Подстригач Я. С., Прокопенко А. Г., Вигака В. М., Горешник А. Д. Прогрев паропровода при заданном законе изменения температуры пара на входе.— Теплоэнергетика, 1973, № 12, с. 71—75.
10. Похорилер В. Л. Расчет прогрева длинных паропроводов.— Теплоэнергетика, 1973, 8, с. 43—46.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. М.— Л., Гостехиздат, 1951. 804 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР
Южное отделение ОРГРЭС

Поступила в редколлегию
12.IX 1976 г.

УДК 539.377

Ф. В. Семерак

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ, НАГРЕВАЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрим тонкую полубесконечную упругую изотропную пластинку с теплоотдачей, поверхность $x = 0$ которой предполагается теплоизолированной. Пластинка нагревается линейным источником тепла постоянной мощности $\frac{q}{2\delta}$, движущимся с переменной скоростью v (τ) в положительном направлении оси y на расстоянии $x = d$ от края пластинки. Для определе-

ния температурного поля в пластинке имеем уравнение теплопроводности [1]

$$(\Delta - \kappa^2) T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{2\lambda\delta} \delta(x-d) \delta \left[y - \int_0^\tau v(\zeta) d\zeta \right] \quad (1)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} T|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad T|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \quad T|_{\tau=0} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\kappa^2 = \frac{\alpha}{\lambda\delta}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\delta(\zeta)$ — дельта-функция Дирака; α, λ, a — коэффициенты теплоотдачи с боковых поверхностей $z = \pm \delta$, теплопроводности, температуропроводности соответственно; τ — время.

Используя интегральные преобразования Фурье по y и Лапласа по τ [2, 3], температурное поле пластинки находим в виде

$$\begin{aligned} \theta = \int_0^{Fo} \frac{1}{Fo - \zeta} \exp \left[-\text{Bi}(Fo - \zeta) - \frac{(Y - H)^2}{4(Fo - \zeta)} \right] \left\{ \exp \left[-\frac{(X + D)^2}{4(Fo - \zeta)} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-\frac{(X - D)^2}{4(Fo - \zeta)} \right] \right\} d\zeta, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\theta = \frac{T}{Q}; \quad Q = \frac{q}{8\pi\lambda\delta}; \quad H = \int_0^\tau v(\rho) d\rho; \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2};$$

$$\text{Bi} = \alpha\kappa^2\delta^2; \quad V(\zeta) = \frac{v(\zeta)\delta}{a}; \quad X = \frac{x}{\delta}; \quad Y = \frac{y}{\delta}; \quad D = \frac{d}{\delta}.$$

Температурные напряжения, вызываемые температурным полем (3), определяем по известным [1] формулам

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

где $\Phi = U - 2G\Psi$; U — бигармоническая функция, т. е.

$$\Delta\Delta U = 0; \quad (5)$$

Ψ — термоупругий потенциал, являющийся частным решением уравнения

$$\Delta\Psi = \alpha_t(1 + \nu)T; \quad (6)$$

α_t — температурный коэффициент линейного расширения; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

В случае, когда пластинка свободна от внешней нагрузки, компоненты температурных напряжений (4) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad x = 0, \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Применяя к формулам (4) и уравнениям (5), (6) интегральные преобразования Фурье по координате y и Лапласа по времени τ , с учетом изображения температурного поля (3) получаем

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\eta^2 \bar{\Phi}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dx^2}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = i\eta \frac{d\bar{\Phi}}{dx}, \quad (8)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \right)^2 \bar{U} = 0, \quad (9)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \right) \bar{\Psi} = \alpha_t(1 + \nu) \bar{T} = \sqrt{2\pi} N \bar{F} [e^{-(x+d)\eta_s} + e^{-|x-d|\eta_s}], \quad (10)$$

где

$$N = \alpha_i(1 + \nu)Q; \quad \gamma_s = \sqrt{\frac{s}{a} + \kappa^2 + \eta^2}; \quad \bar{F} = \int_0^{\infty} \exp \left[i\eta \int_0^{\tau} v(\zeta) d\zeta - s\tau \right] d\tau.$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\bar{U} = (Ax + B)e^{-x|\eta|} + (Gx + D)e^{x|\eta|}, \quad (11)$$

а частным решением уравнения (10) будет

$$\bar{\Psi} = \sqrt{2\pi} N \frac{\bar{F}}{\gamma_0} \left[\frac{e^{-(x+d)\gamma_s}}{\gamma_s} + \frac{e^{-|x-d|\gamma_s}}{\gamma_s} - \frac{e^{-(x+d)|\eta|}}{|\eta|} - \frac{e^{-|x-d||\eta|}}{|\eta|} \right], \quad (12)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{s}{a} + \kappa^2.$$

Определив постоянные интегрирования A , B , C и D , находим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -\sqrt{2\pi} \eta^2 \frac{\bar{F}}{\gamma_0} \left\{ \left(\frac{e^{-d\gamma_s}}{\gamma_s} - \frac{e^{-d|\eta|}}{|\eta|} \right) (x|\eta| + 1) e^{-x|\eta|} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(x+d)\gamma_s}}{\gamma_s} + \frac{e^{-|x-d|\gamma_s}}{\gamma_s} - \frac{e^{-(x+d)|\eta|}}{|\eta|} - \frac{e^{-|x-d||\eta|}}{|\eta|} \right] \right\}, \\ \bar{\sigma}_y &= \sqrt{2\pi} \eta^2 \frac{\bar{F}}{\gamma_0} \left\{ \left(\frac{e^{-d\gamma_s}}{\gamma_s} - \frac{e^{-d|\eta|}}{|\eta|} \right) (x|\eta| - 1) e^{-x|\eta|} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\gamma_s e^{-(x+d)\gamma_s} + \gamma_s e^{-|x-d|\gamma_s} - |\eta| e^{-(x+d)|\eta|} - |\eta| e^{-|x-d||\eta|}] \right\}, \quad (13) \\ \bar{\tau}_{xy} &= i \sqrt{2\pi} \eta \frac{\bar{F}}{\gamma_0} \left\{ \left(\frac{e^{-d|\eta|}}{|\eta|} - \frac{e^{-d\gamma_s}}{\gamma_s} \right) x \eta^2 e^{-x|\eta|} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [e^{-(x+d)\gamma_s} + e^{-|x-d|\gamma_s} \operatorname{sign}(x-d) - e^{-(x+d)|\eta|} - e^{-|x-d||\eta|} \operatorname{sign}(x-d)] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{ii}}{2\alpha_i EQ} \quad (i = x, y), \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\alpha_i EQ}.$$

Переходим в выражениях (13) от изображений к оригиналам, используя справочные данные [2, 3] и теоремы о свертке для преобразований Лапласа и Фурье. В результате получаем следующие выражения температурных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2 \exp(-\operatorname{Bi}Fo) \int_0^{Fo} \left\langle X [DP_1 + XP_2 - 2R_2(Y-H)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} X_2 \right\rangle \operatorname{erfc} \left(\frac{D}{2\sqrt{Fo-\zeta}} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi(Fo-\zeta)}} \left\{ \frac{X}{4(Fo-\zeta)} [\Phi(Y-H) + X\Psi_1] - \right. \\ &\quad \left. - XX_1 + \frac{1}{2} \Psi_1 \right\} \exp \left[-\frac{D^2}{4(Fo-\zeta)} \right] - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p_+^2} \left[\frac{z^+}{p_+^2} - \frac{(Y-H)^2}{2(Fo-\zeta)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[-\frac{p_+^2}{4(Fo-\zeta)} \right] + \frac{1}{p_-^2} \left[\frac{z^-}{p_-^2} - \frac{(Y-H)^2}{2(Fo-\zeta)} \right] \exp \left[-\frac{p_-^2}{4(Fo-\zeta)} \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{2X}{p_+^6} (X+D) [z^+ - 2(Y-H)^2] - \frac{1}{2} X_2 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{X^2 - D^2 - (Y-H)^2}{4(Fo-\zeta)} \right] \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{X[X^2 - (Y-H)^2]}{4(Fo-\zeta)^2} (\varphi f_1 + \psi g_1) + \frac{Y-H}{2(Fo-\zeta)} \left(1 - \frac{X^2}{Fo-\zeta} \right) (\varphi g_1 - \psi f_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{X^2}{Fo-\zeta} \right) (\varphi f_2 + \psi g_2) + \frac{X(Y-H)}{Fo-\zeta} (\varphi g_2 - \psi f_2) + 2X(\varphi f_3 + \psi g_3) \right\rangle d\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_u = & 2 \exp(-\text{BiFo}) \int_0^{\text{Fo}} \left\langle X [DP_1 + XP_2 - 2R_2(Y-H)^2] - \right. \\
& - \frac{1}{2} X_2 \left. \right\rangle \text{erfc} \left(\frac{D}{2\sqrt{\text{Fo}-\zeta}} \right) - \frac{D}{\sqrt{\pi(\text{Fo}-\zeta)}} \left\{ \frac{X}{4(\text{Fo}-\zeta)} [\Phi(Y-H) + X\Psi_1] - \right. \\
& - XX_1 - \frac{1}{2} \Psi_1 \left. \right\} \exp \left[-\frac{D^2}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho_+^2} \left[\frac{z^+}{\rho_+^2} + \frac{(X+D)^2}{2(\text{Fo}-\zeta)} \right] \times \right. \\
& \times \exp \left[-\frac{\rho_+^2}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] + \frac{1}{\rho_-^2} \left[\frac{z^-}{\rho_-^2} + \frac{(X-D)^2}{2(\text{Fo}-\zeta)} \right] \exp \left[-\frac{\rho_-^2}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{2X}{\rho_+^6} (X+D) [z^+ - 2(Y-H)^2] + \frac{1}{2} X_1 + \frac{z^+}{\rho_+^4} + \\
& + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{X^2 - D^2 - (Y-H)^2}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] \left\{ \frac{X [4(\text{Fo}-\zeta) + X^2 - (Y-H)^2]}{4(\text{Fo}-\zeta)^2} (\varphi f_1 + \psi g_1) - \right. \\
& - \frac{Y-H}{2(\text{Fo}-\zeta)} \left(1 + \frac{X^2}{\text{Fo}-\zeta} \right) (\varphi g_1 - \psi f_1) + \left(1 + \frac{X^2}{\text{Fo}-\zeta} \right) (\varphi f_2 + \psi g_2) + \\
& \left. + \frac{X(Y-H)}{\text{Fo}-\zeta} (\varphi g_2 - \psi f_2) + 2X(\varphi f_3 + \psi g_3) \right\} d\zeta, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & 2 \exp(-\text{BiFo}) \int_0^{\text{Fo}} \left\langle X(Y-H) \left\{ [W(Y-H)^2 - 3Q_2] \text{erfc} \left(\frac{D}{2\sqrt{\text{Fo}-\zeta}} \right) - \right. \right. \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\pi(\text{Fo}-\zeta)}} \left[4\Omega + \frac{D\Phi}{2(\text{Fo}-\zeta)} \right] + \frac{2}{\rho_+^6} [2(X+D)^2 + z^+] \left. \right\} + \\
& + (Y-H) \left\{ \frac{X+D}{\rho_+^2} \left[\frac{1}{\rho_+^2} + \frac{1}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] \exp \left[-\frac{\rho_+^2}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] + \right. \\
& + \frac{X-D}{\rho_-^2} \left[\frac{1}{\rho_-^2} + \frac{1}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] \exp \left[-\frac{\rho_-^2}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] - \Omega \left. \right\} + \\
& + \frac{1}{2} X \exp \left[\frac{X^2 - D^2 - (Y-H)^2}{4(\text{Fo}-\zeta)} \right] \left[\frac{2(\text{Fo}-\zeta) + X^2 - (Y-H)^2}{4(\text{Fo}-\zeta)^2} (\varphi g_1 - \psi f_1) + \right. \\
& + \frac{X(Y-H)}{2(\text{Fo}-\zeta)^2} (\varphi f_1 + \psi g_1) - \frac{X}{\text{Fo}-\zeta} (\varphi g_2 - \psi f_2) - \\
& \left. - \frac{Y-H}{\text{Fo}-\zeta} (\varphi f_2 + \psi g_2) + 2(\varphi g_3 - \psi f_3) \right] \left. \right\rangle d\zeta,
\end{aligned}$$

где

$$\rho_{\pm}^2 = (X \pm D)^2 + (Y-H)^2; \quad z^{\pm} = (X \pm D)^2 - (Y-H)^2; \quad \beta = \frac{X}{2\sqrt{\text{Fo}-\zeta}};$$

$$\gamma = \frac{Y-H}{2\sqrt{\text{Fo}-\zeta}}; \quad \varphi = \text{erfc}(\beta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta^2) \int_0^{\gamma} e^{u^2} \sin \beta u du;$$

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta^2) \int_0^{\gamma} e^{u^2} \cos \beta u du; \quad f_i = r_i \cos 2\beta\gamma - q_i \sin \beta\gamma;$$

$$g_i = r_i \sin 2\beta\gamma - q_i \cos 2\beta\gamma \quad (i = 1, 2, 3); \quad r_1 = \Psi_1;$$

$$q_1 = \Phi(Y-H); \quad r_2 = X_1; \quad q_2 = 2\Omega(Y-H); \quad r_3 = XP_1 + DP_2 - \\
- 2R_1(Y-H)^2; \quad q_3 = (2Q_1 + P_1)(Y-H); \quad \Phi = \rho_+^{-2} + \rho_-^{-2};$$

$$\Psi_{1,2} = \frac{X+D}{\rho_+^2} \pm \frac{X-D}{\rho_-^2}; \quad X_{1,2} = \frac{z^+}{\rho_+^4} \pm \frac{z^-}{\rho_-^4}; \quad \Omega = \frac{X+D}{\rho_+^4} + \frac{X-D}{\rho_-^4};$$

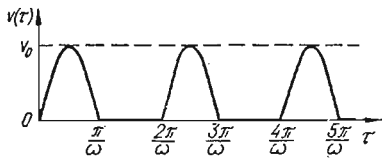
$$Q_{1,2} = \frac{(X+D)^2}{\rho_+^6} \pm \frac{(X-D)^2}{\rho_-^6}; \quad P_{1,2} = \frac{z^+}{\rho_+^6} \pm \frac{z^-}{\rho_-^6}; \quad R_{1,2} = \frac{X+D}{\rho_+^6} \pm \frac{X-D}{\rho_-^6};$$

$$W = \rho_+^{-6} - \rho_-^{-6}.$$

Пусть $v(\tau)$ изменяется по закону

$$v(\tau) = v_0 \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega \tau - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega\tau)}{(2n-1)(2n+1)} \right],$$

изображенному на рисунке (v_0 — начальная скорость, ω — частота). Тогда



$$H = V_0 \left[\frac{\zeta}{\pi} + \frac{1}{2\chi} (1 - \cos \chi \zeta) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\chi\zeta)}{(2n-1)2n(2n+1)} \right],$$

где

$$V_0 = \frac{v_0 \delta}{a}, \quad \chi = \frac{\omega \delta^2}{a}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстриган Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., «Наук. думка», 1972. 308 с.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., «Наука», 1974. 542 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высш. школа», 1965. 465 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.IX 1976 г.

УДК 539.377

О. Н. Шаблий, М. С. Михалишин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ ОСТАТОЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В РЕЗУЛЬТАТЕ НАПЛАВКИ ТОНКОЙ ПОЛОГОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Одним из наиболее эффективных способов повышения срока службы рабочих деталей машин является наплавка их более износостойкими материалами с помощью индукционного нагрева токами высокой частоты. Однако в ряде случаев после наплавки детали значительно изменяют свою форму и в них возникают большие остаточные напряжения, что не позволяет нормально их эксплуатировать. В связи с этим необходимо проектировать такие электроиндукторы, которые позволяли бы производить наплавку легко поддающихся короблению деталей, а также уметь находить поля возникающих в результате этого остаточных перемещений, деформаций и напряжений.

В данной работе найдены остаточные перемещения, деформации и напряжения, возникающие в результате индукционной наплавки ножей ботвоуборочной машины «БМ-6». Для проведения наплавки круглых в плане конусообразных тонких дисков предложен круговой односторонний индуктор, определена необходимая для обеспечения наплавки мощность установки ТВЧ и найдены электромагнитное и температурное поля, которые создает такой индуктор.