

10. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1975, вып. 15, с. 90—98.
11. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М., «Мир», 1966. 296 с.
12. Holland R., Nisse E. Design of resonant piezoelectric devices. Cambridge, M. I. T. Press, 1969. 258 p.
13. Reichardt W. Elektroakustik. Leipzig, BSB V. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1971, 95S.
14. Toulis W. J. Electromechanical coupling and composite transducers.— JASA, 1963, N 35, p. 74—80.
15. Toulis W. J. Redefinition of effective electromechanical coupling factor.— Ibid., p. 2024—2025.
16. Toulis W. J. Duality in the electromechanical coupling factor.— Ibid., p. 2025.
17. Woolett R. S. Comments on «Electromechanical coupling and composite transducers».— Ibid., p. 1837—1838.

Институт механики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
13.IX 1976 г.

УДК 536.242 : 62 — 503.55

В. М. Вигак, А. Г. Прокопенко, О. М. Федичко

#### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОЙ ГРЕЮЩЕЙ СРЕДЫ В ДЛИННОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Режим нагрева длинных магистральных паропроводов теплоэнергоблоков характеризуется изменением температуры пара на пути его от парогенератора до турбины вследствие аккумуляции тепла металлом паропроводов. Это обстоятельство необходимо учитывать, например, в процессе проектирования при оценке надежности работы турбины, паропроводов и пусковой схемы блока в целом, для чего следует знать температуру пара и паропроводов вдоль длины в зависимости от заданной начальной температуры паропровода, температуры пара на входе в паропровод и продолжительности нагрева. Задача прогрева длинных трубопроводов рассмотрена в работах [4, 9, 10].

Проблема автоматизации управления пусковыми процессами теплоэнергоборудования требует решения задачи оптимального по быстрдействию управления нестационарными температурными режимами при ограничениях на функцию управления, в качестве которой выступает температура греющей среды, и температурные напряжения, возникающие в элементах оборудования. Такую задачу для одномерного температурного поля можно решить точно либо приближенно известными методами [1—3, 5, 7, 8].

Правда, в период пуска турбогенератора скорость подъема температуры греющей среды в районе турбины ограничивается температурными напряжениями в массивных запорных или паровпускных органах турбины, тогда как регулирование температуры среды осуществляется тепловыделением топки и пусковыми регуляторами, установленными на выходе из парогенератора.

Следовательно, если одним из методов [1—3, 5, 7, 8] найти оптимальную температуру греющей среды в районе турбины, то возникает обратная по сравнению с решенной [4, 9, 10] задача определения температуры этой среды на входе в паропровод, обеспечивающей найденную оптимальную температуру ее на выходе при заданной начальной температуре трубы.

Таким образом, приходим к задаче оптимального управления системой с распределенными параметрами с двумя последовательно включенными звеньями, первым из которых является звено запаздывания (точнее, звено опережения), для которого необходимо решить упомянутую задачу управления, т. е. найти входной сигнал при заданном выходном. В качестве последнего служит входной сигнал для второго звена, найденный из решения задачи

оптимального по быстродействию управления нагревом при ограничениях на функцию управления и термоупругие напряжения [1, 2].

Для решения задачи управления температурой среды в длинном трубопроводе рассмотрим следующую задачу: найти среднюю по сечению полого цилиндра нестационарную температуру однофазной среды (при  $z = l$  — управление)

$$t(z, \tau) = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} t^*(r, z, \tau) r dr,$$

ограниченную сверху на входе в цилиндр ( $z = l$ )

$$t(l, \tau) \leq t_0(\tau)$$

предельно возможной либо допустимой температурой  $t_0(\tau)$ , и среднюю температуру цилиндра

$$T(z, \tau) = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} T^*(r, z, \tau) r dr,$$

чтобы при заданной начальной температуре его

$$T(z, 0) = F(z) \quad (1)$$

обеспечить минимально возможное отклонение температуры среды  $t(0, \tau)$  от оптимальной величины  $f(\tau)$  на выходе из цилиндра ( $z = 0$ ). Здесь  $z \geq 0$  — продольная координата с началом на выходе из цилиндра, направленная навстречу движению среды;  $\tau \geq 0$  — время;  $R_1, R_2$  — внутренний и наружный радиусы цилиндра;  $t^*(r, z, \tau)$  и  $T^*(r, z, \tau)$  — точные значения температуры среды и цилиндра, которые являются еще и функциями радиуса  $r$ .

Если предположить, что функции  $t_0(\tau)$  и  $f(\tau)$  при нагреве монотонно неубывающие, то минимально возможное отклонение  $t(0, \tau)$  от  $f(\tau)$  будет тогда, когда

$$t(l, \tau) = t_0(\tau), \quad t(0, \tau) \leq f(\tau) \quad (2)$$

либо

$$t(l, \tau) \leq t_0(\tau), \quad t(0, \tau) = f(\tau). \quad (3)$$

В случае (2) управление  $t(l, \tau)$  определяется тривиально — оно равно предельно допустимому  $t_0(\tau)$ , а температуру среды  $t(z, \tau)$  и цилиндра  $T(z, \tau)$  можно найти с помощью выражений, приведенных, например, в работе [9].

Для определения управления  $t(l, \tau)$  в случае (3) рассмотрим уравнение распределения температуры для осесимметричного потока греющей среды, движущейся со скоростью  $V$  внутри цилиндра, которое можно записать [6] в виде

$$\frac{\partial t^*}{\partial \tau} - V \frac{\partial t^*}{\partial z} = a_1 \left( \frac{\partial^2 t^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^*}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

и уравнение теплопроводности для цилиндра

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} \right), \quad (5)$$

где  $a_1, a_2$  — коэффициенты температуропроводности среды и материала цилиндра.

Как и в работе [9], используя граничные условия

$$\frac{\partial t^*}{\partial r}(0, z, \tau) = 0, \quad \lambda_1 \frac{\partial t^*}{\partial r}(R_1, z, \tau) = \lambda_2 \frac{\partial T^*}{\partial r}(R_1, z, \tau),$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r}(R_1, z, \tau) = \frac{\alpha}{\lambda_2} [T^*(R_1, z, \tau) - t(z, \tau)], \quad \lambda_2 \frac{\partial T^*}{\partial r}(R_2, z, \tau) = Q(z, \tau)$$

и пренебрегая теплопроводностью вдоль оси цилиндра, на основании уравнений (4), (5) для определения температур  $t(z, \tau)$  и  $T(z, \tau)$  получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial t(z, \tau')}{\partial z} - \gamma t(z, \tau') + \gamma T(z, \tau') &= -\gamma m_1 Q(z, \tau'), \\ \frac{\partial T(z, \tau')}{\partial \tau'} + \beta T(z, \tau') - \beta t(z, \tau') &= m_3 Q(z, \tau'), \end{aligned} \quad (6)$$

которую после некоторых преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial \tau'} + \beta \frac{\partial t}{\partial z} - \gamma \frac{\partial t}{\partial \tau'} &= -\gamma m_1 \frac{\partial Q}{\partial \tau'} - \gamma m_2 Q, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial \tau'} + \beta \frac{\partial T}{\partial z} - \gamma \frac{\partial T}{\partial \tau'} &= m_3 \frac{\partial Q}{\partial z} - \gamma m_2 Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент теплообмена;  $\lambda_1, \lambda_2$  — коэффициенты теплопроводности среды и цилиндра;  $Q(z, \tau)$  — функция, описывающая тепловой поток на наружной поверхности цилиндра;  $\tau' = \tau + \frac{z}{V}$ ;

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\gamma^*}{1 + q\beta^*}; \quad \beta = \frac{\beta^*}{1 + q\beta^*}; \quad \gamma^* = \frac{2\pi R_1 \alpha}{G c_1}; \quad \beta^* = \frac{2\pi R_1 \alpha}{g c_2}; \\ m_1 &= -\frac{R_2}{4(1-k^2)\lambda_2} \left[ 1 + k^2 + \frac{4k^2}{1-k^2} (2 - k^2) \ln k \right]; \quad m_2 = \frac{2\pi R_2}{g c_2}; \\ m_3 &= \frac{m_2 - \rho\beta^*}{1 + q\beta^*}; \quad \rho = \frac{R_2}{2\lambda_2} \left( 1 + \frac{2 \ln k}{1-k^2} \right); \quad q = -\frac{R_2^2}{8a_2} (3 - k^2 + \\ &\quad + \frac{4 \ln k}{1-k^2}); \end{aligned}$$

$k = \frac{R_1}{R_2}$ ,  $k \in (0, 1)$ ;  $c_1, c_2$  — удельные теплоемкости среды и цилиндра;  $g$  — масса единицы длины цилиндра;  $G$  — расход среды.

Используя систему уравнений (6) и сделав замену переменных  $\gamma z = x$ ,  $\beta \tau' = \tau_1$ , решение задачи (1), (3), (7) можно свести к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau_1} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \tau_1} = -\beta m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} - m_2 \varphi \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$u(0, \tau_1) = f^*(\tau_1), \quad (9)$$

$$u(x, 0) = \left\{ C_1 - \int [F^*(x) + \beta m_1 \varphi(x, 0)] \exp(-x) dx \right\} \exp x$$

и уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau_1} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial \tau_1} = m_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - m_2 \varphi \quad (10)$$

с краевыми условиями

$$U(x, 0) = F^*(x), \quad (11)$$

$$U(0, \tau_1) = \left\{ C_2 + \int [f^*(\tau_1) + m_3 \varphi(0, \tau_1)] \exp \tau_1 d\tau_1 \right\} \exp(-\tau_1),$$

где

$$u(x, \tau_1) = \frac{t(x, \tau_1)}{f(0)}; \quad U(x, \tau_1) = \frac{T(x, \tau_1)}{f(0)};$$

$$f^*(\tau_1) = \frac{f(\tau_1)}{f(0)}; \quad F^*(x) = \frac{F(x)}{f(0)}; \quad \varphi(x, \tau_1) = \frac{Q(x, \tau_1)}{\beta f(0)};$$

$C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Итак, решение поставленной задачи сводится к решению двух дифференциальных уравнений (8) и (10) гиперболического типа с данными на

характеристиках (9) и (11). Поэтому решение уравнения (8) при краевых условиях (9) с помощью метода Римана [11] можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau_1) = & \exp(x - \tau_1) \left\{ J_0(2\sqrt{x\tau_1}) + \int_0^{\tau_1} J_0(2\sqrt{x(\tau_1 - \eta)}) [f^*(\eta) + \right. \\
 & \left. + \frac{df^*(\eta)}{d\eta}] \exp \eta d\eta - \int_0^x J_0(2\sqrt{\tau_1(x - \xi)}) [F^*(\xi) + \beta m_1 \varphi(\xi, 0)] \times \right. \\
 & \times \exp(-\xi) d\xi + \int_0^{\tau_1} \int_0^x J_0(2\sqrt{(\xi - x)(\eta - \tau_1)}) \left[ \beta m_1 \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \right. \\
 & \left. + m_2 \varphi(\xi, \eta) \right] \exp(\eta - \xi) d\xi d\eta \Big\}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Аналогично найденное решение уравнения (10) при краевых условиях (11) имеет вид

$$\begin{aligned}
 U(x, \tau_1) = & \exp(x - \tau_1) \left\{ F^*(0) J_0(2\sqrt{x\tau_1}) + \int_0^{\tau_1} J_0(2\sqrt{x(\tau_1 - \eta)}) [f^*(\eta) + \right. \\
 & \left. + m_3 \varphi(0, \eta)] \exp \eta d\eta - \int_0^x J_0(2\sqrt{\tau_1(x - \xi)}) \left[ F^*(\xi) - \frac{\partial F^*(\xi)}{\partial \xi} \right] \times \right. \\
 & \times \exp(-\xi) d\xi - \int_0^{\tau_1} \int_0^x J_0(2\sqrt{(\xi - x)(\eta - \tau_1)}) \left[ m_3 \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \right. \\
 & \left. - m_2 \varphi(\xi, \eta) \right] \exp(\eta - \xi) d\xi d\eta \Big\}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Если заданные функции  $f(\tau_1)$  и  $F(x)$  аппроксимированы в виде степенных рядов

$$f(\tau_1) = \sum_{n=0}^p \omega_n \tau_1^n, \quad F(x) = \sum_{n=0}^p \gamma_n x^n$$

и  $Q = 0$ , то, сделав замену переменных интегрирования

$$x(\tau_1 - \eta) = y, \quad \tau_1(x - \xi) = y,$$

решения (12), (13) можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau_1) = & J_0(2\sqrt{x\tau_1}) \exp(x - \tau_1) + \sum_{n=0}^p \left\{ \frac{\exp x}{x} [\omega_n^* + (1+n)\omega_{n+1}^*] \times \right. \\
 & \times \int_0^{x\tau_1} J_0(2\sqrt{y}) \left( \tau_1 - \frac{y}{x} \right)^n \exp\left(-\frac{y}{x}\right) dy - \frac{\gamma_n^*}{\tau_1} \exp(-\tau_1) \times \\
 & \times \int_0^{x\tau_1} J_0(2\sqrt{y}) \left( x - \frac{y}{\tau_1} \right)^n \exp \frac{y}{\tau_1} dy \Big\}, \\
 U(x, \tau_1) = & \gamma_0^* J_0(2\sqrt{x\tau_1}) \exp(x - \tau_1) + \sum_{n=0}^p \left\{ \frac{\omega_n^*}{x} \exp x \times \right. \\
 & \times \int_0^{x\tau_1} J_0(2\sqrt{y}) \left( \tau_1 - \frac{y}{x} \right)^n \exp\left(-\frac{y}{x}\right) dy + \frac{\exp(-\tau_1)}{\tau_1} [(n+1)\gamma_{n+1}^* - \\
 & \left. - \gamma_n^*] \int_0^{x\tau_1} J_0(2\sqrt{y}) \left( x - \frac{y}{\tau_1} \right)^n \exp \frac{y}{\tau_1} dy \Big\},
 \end{aligned}$$

где

$$\omega_n^* = \frac{\omega_n}{\omega_0} \quad (n = 1, 2, \dots, p); \quad \gamma_n^* = \frac{\gamma_n}{\omega_0} \quad (n = 0, 1, \dots, p).$$

Если  $p = 2$  и  $F(x) = 0$ , то на основании последних выражений находим

$$u = u_0 + \omega_1^* u_1 + \omega_2^* u_2, \quad U = U_0 + \omega_1^* U_1 + \omega_2^* U_2, \quad (14)$$

где

$$u_0 = 1 + [J_0(2\sqrt{x\tau_1}) - P_1(x, \tau_1)] \exp(x - \tau_1);$$

$$u_1 = x + \tau_1 - [P_1(x, \tau_1) - P_2(x, \tau_1)] \exp(x - \tau_1);$$

$$u_2 = 2 - 4x + x^2 + 2\tau_1 + \tau_1^2 - 2(1-x)(1+\tau_1) + [2P_2(x, \tau_1) - P_3(x, \tau_1)] \exp(x - \tau_1);$$

$$U_0 = 1 - P_1(x, \tau_1) \exp(x - \tau_1);$$

$$U_1 = -1 + x + \tau_1 + P_2(x, \tau_1) \exp(x - \tau_1);$$

$$U_2 = 2 - 4x + x^2 + \tau_1^2 - 2(1-x)\tau_1 - P_3(x, \tau_1) \exp(x - \tau_1);$$

$$P_1(x, \tau_1) = -1 + \exp(-x) + J_0(2\sqrt{x\tau_1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-x)^{i+j} \tau_1^i}{j!(i+j)!};$$

$$P_2(x, \tau_1) = -1 + (1-x) \exp(-x) + J_0(2\sqrt{x\tau_1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(i+1)(-x)^{i+j} \tau_1^i}{j!(j+i)!};$$

$$P_3(x, \tau_1) = -2 + (2 - 4x + x^2) \exp(-x) + 2J_0(2\sqrt{x\tau_1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(i+2)(i+1)(-x)^{i+j} \tau_1^i}{j!(i+j)!}.$$

Из-за наличия функции Бесселя  $J_0$  в решении (12) температура греющей среды имеет в начальный период колебательный характер, затухающий со временем. В качестве иллюстрации на рис. 1—3 показано поведение функций  $u_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) выражения (14) для некоторых фиксированных значений  $x$ .

Для окончательного решения поставленной задачи управления нагревом необходимо найти время переключения управления  $t$  ( $l, \tau$ ) =  $t_0(\tau)$  для случая (2) на управление (12), найденное для случая (3). Условие сопряжения между режимами нагрева для обоих случаев служит равенство

$$t(0, \tau_0) = f(\tau_0),$$

из которого определяется время переключения управления  $\tau_0$ . Здесь  $t(x, \tau)$  представляет собой температуру греющей среды для первого случая. При переключении управления в обратном направлении условием сопряжения будет равенство

$$t(l, \tau_0) = t_0(\tau_0),$$

где  $t(x, \tau)$  — температура греющей среды для второго случая.

Таким образом, поставленная задача оптимального управления нестационарной температурой греющей среды в длинном полом цилиндре решена аналитическим путём.

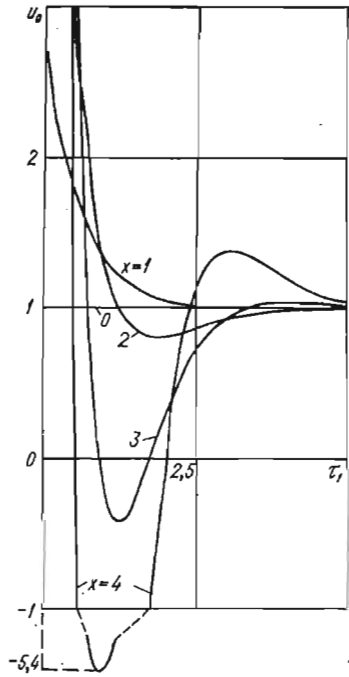


Рис. 1

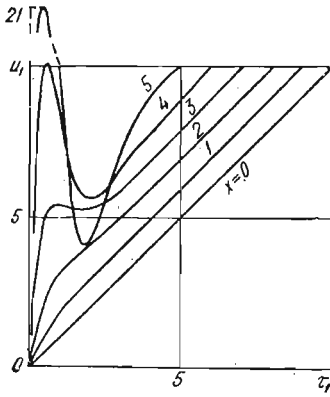


Рис. 2

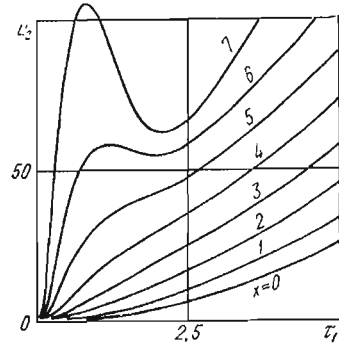


Рис. 3

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965. 486 с.
2. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1976. 568 с.
3. Допустимые температурные напряжения и скорости прогрева (расхолаживания) толстостенных паропроводов. М., «Энергия», 1975. 104 с. Авт.: В. М. Вигака, С. В. Фальковский, А. Д. Горешник, Б. В. Машенко.
4. Вигака В. М., Горешник А. Д., Прокопенко А. Г. Расчет продолжительности прогрева длинных трубопроводов.— Наладочные и экспериментальные работы ОРГРЭС, 1970, вып. 39, с. 173—179.
5. Вигака В. М., Федоришин А. А. Оптимальный симметричный температурный режим для пластины.— ИФЖ, 1975, 28, № 5, с. 918—919.
6. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.— Л., Машгиз, 1962. 456 с.
7. Подстригач Я. С., Вигака В. М. Оптимальные режимы нагрева и расхолаживания паропроводов.— Теплоэнергетика, 1973, № 7, с. 68—73.
8. Подстригач Я. С., Вигака В. М., Прокопенко А. Г. Оптимальные температурные режимы нагрева ротора турбомашин и паропроводов.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1973, вып. 13, с. 75—80.
9. Подстригач Я. С., Прокопенко А. Г., Вигака В. М., Горешник А. Д. Прогрев паропровода при заданном законе изменения температуры пара на входе.— Теплоэнергетика, 1973, № 12, с. 71—75.
10. Похорилер В. Л. Расчет прогрева длинных паропроводов.— Теплоэнергетика, 1973, 8, с. 43—46.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. М.— Л., Гостехиздат, 1951. 804 с.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР  
Южное отделение ОРГРЭС

Поступила в редколлегию  
12.IX 1976 г.

УДК 539.377

Ф. В. Семерак

#### ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ, НАГРЕВАЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрим тонкую полубесконечную упругую изотропную пластинку с теплоотдачей, поверхность  $x = 0$  которой предполагается теплоизолированной. Пластинка нагревается линейным источником тепла постоянной мощности  $\frac{q}{2\delta}$ , движущимся с переменной скоростью  $v$  ( $\tau$ ) в положительном направлении оси  $y$  на расстоянии  $x = d$  от края пластинки. Для определе-