УДК 539.3 : 534.1

А. Ф. Улитко

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СВЯЗИ В ЗАДАЧАХ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛ

В последнее время в механике деформируемого твердого тела получили значительное развитие исследования по изучению механических полей деформаций и напряжений с учетом их взаимосвязи с внутренними тепловыми, диффузионными и электромагнитными полями. Существенный вклад в решение научных и прикладных задач этого направления механики внес коллектив ученых Львова, возглавляемый Я. С. Подстригачем [2, 6—8].

Практически важный класс задач в указанной области образуют статические и динамические задачи электроупругости для пьезокерамических тел. Эффективность работы пьезокерамических элементов электромеханических преобразователей энергии, широко используемых в различных технических устройствах, определяется рядом факторов, одним из которых является так называемый коэффициент электромеханической связи (КЭМС) [1].

Большинство авторов [3, 4, 9, 13] вкладывают в определение КЭМС физический смысл, а именно: квадрат КЭМС это отношение способной к обращению запасенной электрической (механической) энергии ко всей подведенной из вне к пьезокерамическому телу механической (электрической) энергии. Такое определение является наиболее полным и полезным в статике и в задачах динамического анализа поведения пьезоэлементов, хотя и не вполне четким в части трактовки понятия «способная к обращению». Заметим, что для простейших однородных случаев распределения электроупругих полей в пьезоэлементах к тем же значениям для КЭМС приводят формально-математические правила вычислений, например, правило отношений диагональных произведений матрицы уравнений состояния или правило отношений взаимной энергии к среднему геометрическому из произведения упругой и электрической энергии [1, 12].

Для оценки эффективности возбуждения колебаний пьезоэлементов на резонансных частотах У. Мезоном введено понятие динамического КЭМС [1]. В основу его определения положено отношение разности квадратов частот антирезонанса и резонанса к квадрату частоты антирезонанса:

$$k_d^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}, \tag{1}$$

т. е. отношения величин, легко определяемых экспериментально по кривой проводимости при электрическом возбуждении колебаний.

Использование формулы (1) при анализе эффективности возбуждения колебаний в простейших (как правило, одномерных) задачах показало [1], что для однородных деформаций (радиальные колебания кольца, тонкого цилиндра, тонкой сферы и т. п.) значения динамических коэффициентов связи совпадают с их статическими значениями. Однако, если деформация неоднородна по объему пьезоэлемента, то значения динамических КЭМС ниже, а на высоких частотах намного ниже статических значений. При этом имеется в виду, что расположение поверхностных электродов, через которые осуществляется подвод электрической энергии, выбрано неизменным на всех частотах колебаний. Положение может измениться, если использовать внутренние (расположенные внутри объема тела) или поверхностные разделенные электроды. Однако и в этих случаях динамические значения КЭМС всегда ниже их статических значений на однородной деформации, хотя и могут быть близкими по величине к последним. Объяснение такого поведения КЭСМ в динамике с электрическим подходом к задачам колебаний пьезоэлементов дано по существу У. Мэзоном при выводе формулы (1). Представив решения задач вблизи резонансных частот колебаний в виде эквивалентных схем, он нашел связь выражения (1) со статической и динамической емкостями пьезоэлементов. При этом не предпринимались попытки привести в соответствие определение k_d^2 из (1) с энергетическим, указанным выше. Следует отметить еще один существенный момент, касающийся формулы (1). Дело в том, что определение k_d^2 по формуле (1) в принципе невозможно для внерезонансных частот колебаний пьезокерамических тел. Имеются трудности в применении формулы (1) для случаев возбуждения колебаний механическими нагрузками. Эти и некоторые другие моменты, касающиеся метода Мезона, были предметом дискуссии в зарубежной литературе [15—17]. Хотя выводы работы [14] оказались ошибочными [17], сам подход автора к проблеме определения динамических КЭМС с энергетических позиций заслуживает внимания.

В настоящей статье на простейшем примере продольных колебаний пьезокерамического образца цилиндрической формы реализован энергетический способ вычисления КЭМС в соответствии с его определением, данным в начале статьи, и получено аналитическое выражение динамического КЭМС на любой частоте колебаний. На резонансных частотах удалось привести в соответствие определение k_d^2 по Мэзону с его определением по энергетическому методу.

Уравнения пьезоэффекта, упрощенные на случай осевой деформации поляризованных по длине цилиндрических образцов, записываются в виде [1, 10]

$$\varepsilon_z = s_{33}^E\sigma_z + d_{33}E_z, \qquad D_z = \varepsilon_{33}^T E_z + d_{33}\sigma_z, \tag{2}$$

где s_{33}^E — модуль податливости материала, измеренный при постоянном (нулевом) электрическом поле; ε_{33}^T — диэлектрическая проницаемость, измеренная при постоянных (нулевых) механических напряжениях; d_{33} — пьезоэлектрический модуль; ε_z, σ_z — соответственно деформация и напряжения в направлении оси $0z$; E_z, D_z — осевые составляющие напряженности электрического поля и электрической индукции. Дополняя уравнения состояния (2) уравнением движения элемента сплошной среды [5]

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial_z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{3}$$

и уравнениями вынужденной электростатики [11]

$$E_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial D_z}{\partial_z} = 0, \tag{4}$$

получаем полную систему уравнений, описывающих сопряженные электроупругие процессы в пьезокерамических образцах цилиндрической формы. В дополнение к введенным ранее величинам в уравнениях (3), (4) обозначено: ρ — плотность пьезокерамического материала; u_z — осевые перемещения; ψ — электростатический потенциал; t — координата времени.

Если в равенствах (2) — (4) за независимые искомые неизвестные принять перемещения $u_z(z, t)$ и потенциал $\psi(z, t)$, то для их определения получаем следующую сопряженную систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{d_{33}}\frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \tag{5}$$

где $c = [\rho s_{33}^E(1-k_{33}^2)]^{-1/2}$ — скорость сопряженной волны, а через k_{33}^2 обозначен квадрат статического продольного КЭМС для однородной деформации [1]:

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_{33}^T s_{33}^E}. \tag{6}$$

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях образца под действием периодически изменяющихся напряжений, приложенных к торцевым поверхностям $z = \pm h$. Покрытые электродами торцы образца предполагаем разомкнутыми. В этом случае граничные условия для системы (5) записываются в виде

$$\sigma_z|_{z=\pm h} = \sigma_0 e^{i\omega t}, \quad D_z|_{z=\pm h} = 0. \tag{7}$$

Значения амплитудных характеристик сопряженного поля в образце находятся элементарно и представляются равенствами

$$\hat{u}_z = \sigma_0 s_{33}^E (1 - k_{33}^2) \frac{\sin \lambda z}{\lambda \cos \lambda h}, \quad \hat{\psi} = \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \sigma_0 \frac{\sin \lambda z}{\lambda \cos \lambda h},$$

$$\hat{\varepsilon}_z = \sigma_0 s_{33}^E (1 - k_{33}^2) \frac{\cos \lambda z}{\cos \lambda h}, \quad \hat{E}_z = -\frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \sigma_0 \frac{\cos \lambda z}{\cos \lambda h}, \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}_z = \sigma_0 \frac{\cos \lambda z}{\cos \lambda h}, \quad \hat{D}_z \equiv 0,$$

где $\lambda = \frac{\omega}{c}$.

Будем рассматривать в дальнейшем амплитудные значения (8) как некоторое статическое сопряженное поле в образце с разомкнутыми электродами. Легко установить, что такое состояние в статике можно создать чисто механическими поверхностными и объемными нагрузками

$$\sigma_z|_{z=\pm h} = \sigma_0, \quad Z = -\frac{\partial \hat{\sigma}_z}{\partial z} = \lambda \sigma_0 \frac{\sin \lambda z}{\cos \lambda h}. \tag{9}$$

Подведенная к образцу энергия при этом равна работе поверхностных и объемных сил [5], т. е.

$$\hat{U}_{\text{пол}} = S\sigma_0 \hat{u}_z(h) + \frac{1}{2} S \int_{-h}^{h} Z\hat{u}_z dz =$$

$$= \frac{1}{2} hSs_{33}^E (1 - k_{33}^2) \frac{\sigma_0^2}{\cos^2 \lambda h} \left(1 + \frac{\sin 2\lambda h}{2\lambda h}\right), \tag{10}$$

где S — площадь поперечного сечения стержня, и внутри объема накапливается в виде механической и электрической энергий. Запасенная в объеме образца электрическая энергия определяется формулой [11]

$$\hat{U}_{\text{эл}} = \frac{1}{2} S\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \int_{-h}^{h} (\hat{E}_z)^2 dz =$$

$$= \frac{1}{2} hSs_{33}^E k_{33}^2 (1 - k_{33}^2) \frac{\sigma_0^2}{\cos^2 \lambda h} \left(1 + \frac{\sin 2\lambda h}{2\lambda h}\right). \tag{11}$$

Из сопоставления формул (10) и (11) видно, что полная электрическая энергия в образце составляет такую же часть общей внутренней, как и в случае однородной статической деформации, т. е. $k_{33}^2 \hat{U}_{\text{пол}}$. Однако в динамике не вся электрическая энергия внутреннего поля является способной к обращению, а лишь та ее часть, которая высвободилась бы на данной неизменной деформации при закорачивании электродов. Амплитудное значение разности потенциалов между электродами согласно формулам (8) равно

$$\hat{\psi}^+ - \hat{\psi}^- = 2 \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \sigma_0 \frac{\sin \lambda h}{\lambda \cos \lambda h}. \tag{12}$$

Соответствующая этой разности потенциалов напряженность однородного электрического поля имеет значение

$$\hat{E}_z^{(0)} = -\frac{\hat{\psi}^+ - \hat{\psi}^-}{2h} = -\frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T}\frac{\sigma_0}{\lambda h}\frac{\sin\lambda h}{\cos\lambda h}. \quad (13)$$

Следовательно, электрическая энергия, способная к обращению (на неизменной деформации!) будет такой:

$$\hat{U}_{\text{эл}}^{(\text{обр})} = \frac{1}{2} S\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)(\hat{E}_z^{(0)})^2 2h =$$
$$= hSs_{33}^E k_{33}^2 (1 - k_{33}^2)\frac{\sigma_0^2}{\cos^2\lambda h}\frac{\sin^2\lambda h}{(\lambda h)^2}. \quad (14)$$

Динамический КЭМС согласно его энергетическому определению находится по формуле

$$k_d^2 = \frac{\hat{U}_{\text{эл}}^{(\text{обр})}}{\hat{U}_{\text{пол}}} = 2k_{33}^2\frac{\sin^2\lambda h}{(\lambda h)^2}\frac{1}{1 + \frac{\sin 2\lambda h}{2\lambda h}}. \quad (15)$$

При $\omega \to 0$ ($\lambda h \to 0$) отсюда получаем статическое значение k_{33}^2. На резонансных частотах колебаний образца с разомкнутыми электродами $\lambda h = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ для k_d^2 получаем формулу

$$k_d^2 = \frac{2k_{33}^2}{\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \quad (16)$$

Именно такие значения для k_d^2 дает формула (1) в случае электрического нагружения образца [1]. Но так как при электрическом нагружении значения $\lambda h = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ соответствуют антирезонансным частотам колебаний, а резонансные частоты находятся ниже [1], то фактически значения динамических КЭМС на резонансах будут больше, чем найденные по формуле (16). Зная $(\lambda h)_{\text{рез}}$, k_d^2 легко вычислить, используя энергетическую формулу (15). Различия результатов, полученных энергетическим методом и методом Мэзона, становятся несущественными для пьезоматериалов с низким коэффициентом электромеханической связи.

Вопросы обобщения изложенного энергетического метода определения динамических КЭМС на трехмерные задачи установившихся колебаний пьезокерамических тел при произвольном нагружении будут освещены в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.— В кн.: Физическая акустика. Под ред. У. Мезона. Т. 1. Ч. А. М., 1966, с. 204—326.
2. *Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Чернявська Л. В.* Температурні поля і напруження в електропровідних тілах при індукційному нагріві.— Вісн. АН УРСР, 1975, № 4, с. 47—54.
3. *Камп Л.* Подводная акустика. М., «Мир», 1972. 328 с.
4. *Кикучи Е.* Ультразвуковые преобразователи. М., «Мир», 1972. 424 с.
5. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935. 674 с.
6. *Підстригач Я. С., Бурак Я. Й.* Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з урахуванням електромагнітних процесів.— Вісн. АН УРСР, 1970, № 12, с. 18—31.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинах. К., «Наук. думка», 1972. 308 с.
8. *Подстригач Я. С., Колодий Б. И.* Двумерное неустановившееся поле температуры и напряжений при индукционном нагреве упругого полупространства.— Прикл. механика, 1970, 6, № 12, с. 68—73.
9. *Свердлин Г. М.* Гидроакустика. Л., «Судостроение», 1976. 280 с.

10. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1975, вып. 15, с. 90—98.
11. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М., «Мир», 1966. 296 с.
12. *Holland R., Nisse E.* Design of resonant piezoelectric devices. Cambridge, M. I. T. Press, 1969. 258 p.
13. *Reichardt W.* Elektroakustik. Leipzig, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1971, 95S.
14. *Toulis W. J.* Electromecanhical coupling and composite transducers.— JASA, 1963, N 35, p. 74—80.
15. *Toulis W. J.* Redefinition of effective electromechanical coupling factor.—Ibid., p. 2024—2025.
16. *Toulis W. J.* Duality in the electromechanical coupling factor.— Ibid., p. 2025.
17. *Woolett R. S.* Comments on «Electromechanical coupling and composite transducers».— Ibid., p. 1837—1838.

Институт механики
АН УССР

Поступила в редколлегию
13.IX 1976 г.

УДК 536.242 : 62 — 503.55

В. М. Вигак, А. Г. Прокопенко, О. М. Федичко

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОЙ ГРЕЮЩЕЙ СРЕДЫ В ДЛИННОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Режим нагрева длинных магистральных паропроводов теплоэнергоблоков характеризуется изменением температуры пара на пути его от парогенератора до турбины вследствие аккумуляции тепла металлом паропроводов. Это обстоятельство необходимо учитывать, например, в процессе проектирования при оценке надежности работы турбины, паропроводов и пусковой схемы блока в целом, для чего следует знать температуру пара и паропроводов вдоль длины в зависимости от заданной начальной температуры паропровода, температуры пара на входе в паропровод и продолжительности нагрева. Задача прогрева длинных трубопроводов рассмотрена в работах [4, 9, 10].

Проблема автоматизации управления пусковыми процессами теплоэнергооборудования требует решения задачи оптимального по быстродействию управления нестационарными температурными режимами при ограничениях на функцию управления, в качестве которой выступает температура греющей среды, и температурные напряжения, возникающие в элементах оборудования. Такую задачу для одномерного температурного поля можно решить точно либо приближенно известными методами [1—3, 5, 7, 8].

Правда, в период пуска турбогенератора скорость подъема температуры греющей среды в районе турбины ограничивается температурными напряжениями в массивных запорных или паровпускных органах турбины, тогда как регулирование температуры среды осуществляется тепловыделением топки и пусковыми регуляторами, установленными на выходе из парогенератора.

Следовательно, если одним из методов [1—3, 5, 7, 8] найти оптимальную температуру греющей среды в районе турбины, то возникает обратная по сравнению с решенной [4, 9, 10] задача определения температуры этой среды на входе в паропровод, обеспечивающей найденную оптимальную температуру ее на выходе при заданной начальной температуре трубы.

Таким образом, приходим к задаче оптимального управления системой с распределенными параметрами с двумя последовательно включенными звеньями, первым из которых является звено запаздывания (точнее, звено опережения), для которого необходимо решить упомянутую задачу управления, т. е. найти входной сигнал при заданном выходном. В качестве последнего служит входной сигнал для второго звена, найденный из решения задачи