

**ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕХАНИЧЕСКИХ, ТЕПЛОВЫХ  
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛАХ**

В настоящей статье приведен обзор теоретических исследований, выполненных во Львовском филиале математической физики Института математики АН УССР, по дальнейшему развитию модельных представлений о процессе деформации неферромагнитных электропроводных тел, изучению во взаимосвязи механических, тепловых и электромагнитных полей в таких телах при воздействии внешних электромагнитных, силовых и температурных факторов применительно к задачам индукционной и магнитоакустической обработки.

**Модельные представления о процессе деформации электропроводных тел.** Модель неферромагнитного электропроводного упругого тела, состоящего из  $n$  электрически заряженных компонентов, и система уравнений модели, описывающих во взаимосвязи протекание процессов деформации, теплопроводности, электропроводности и диффузии, предложена в работе [27]. Для макроскопического описания рассматриваемых процессов использовано понятие локального равновесного состояния. В качестве локальных параметров, соответствующих процессам деформации, теплопроводности и диффузии, принято тензор деформации и тензор напряжений, температуру и энтропию единицы массы тела, концентрацию и химический потенциал компонента  $k$ .

В модели свободные электроны рассматриваются как один из  $n$  электрически заряженных компонентов, масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой других. Параметрами, соответствующими процессу электропроводности, выбраны термодинамический электрический потенциал, который определяется средней энергией свободных электронов и обусловленный электропроводностью, и электрический заряд единицы массы раствора.

Для уравнений модели сформулированы условия единственности их решения, теорема о взаимности работ, а также записано вариационное уравнение [19].

В предельных случаях беспримесного электропроводного тела или неэлектропроводного твердого раствора система уравнений модели совпадает с полученными ранее уравнениями теории деформации электропроводных тел [1, 8, 26] или с уравнениями механотермодиффузии [25]. Если в уравнениях модели беспримесного электропроводного тела пренебречь влиянием поля термодинамического электрического потенциала на процессы деформации, теплопроводности и электропроводности, то можно получить известные уравнения магнитотермоупругости.

**О поверхностных явлениях в электропроводных телах и растворах.** Полученные уравнения применены к исследованию влияния поверхности на распределение электрических зарядов, концентрации растворенного вещества и механических напряжений в трехкомпонентных слое [20] и шаре, а также в беспримесном электропроводном теле со сферическим включением [16]. Показано, что электрические заряды и механические напряжения концентрируются вблизи поверхности тела, достигая максимальных значений на ней. По найденному распределению механических напряжений в приповерхностной области рассчитаны обусловленные действием сил кулоновского взаимодействия поверхностные натяжение и давление. Поверхностное давление практически не зависит от наличия растворенного вещества, а натяжение существенно зависит от концентрации и природы растворенного вещества в теле.

Влияние внешнего электрического поля и силовой нагрузки на поверхностные явления исследовано в работах [3, 4] и показано, что внешнее элект-

тростатическое поле практически не влияет на распределение объемных электрических зарядов и концентрацию растворенного вещества. Внешняя неоднородная силовая нагрузка вызывает неоднородное по поверхности распределение электрических зарядов в отличие от распределения в ненагруженном теле.

На основании исследования термоэлектрических явлений [7] показано, что контакт разнородных электропроводных тел в равновесном состоянии не приводит к появлению электростатического поля вне тел. При неоднородном нагреве поверхности тела вне его возникает электростатическое поле. Если температура поверхности контакта разнородных тел является функцией точек поверхности, то в приконтактной области в установившемся режиме циркулируют замкнутые электрические токи.

В работе [5] исследован ультразвуковой нагрев электропроводных тел и показано, что в зависимости от частоты внешних силовых воздействий и условий закрепления имеем локальный или практически равномерный ультразвуковой нагрев электропроводных твердых тел.

**Влияние внешних периодических во времени электромагнитных полей.** Проводимые исследования по термоупругости электропроводных тел посвящены построению и развитию расчетных схем, а также разработке эффективных аналитических методов определения термоупругого состояния электропроводных тел, в частности пластин и оболочек, находящихся под воздействием периодических во времени электромагнитных полей, исследованию и оптимизации температурных полей и напряжений применительно к задачам индукционной термообработки элементов конструкций.

В работах [11, 18, 21] найдены и исследованы электромагнитные поля, джоулево тепло, температурные поля и напряжения при индукционном нагреве упругих электропроводных полупространства, слоя [11], биметаллического слоя [11, 18] и цилиндра [21] при заданных установившихся токах в индукторе [21] и известной напряженности электрического [11, 18] или магнитного [18] полей на поверхности.

Плоская задача об упруго-пластическом равновесии цилиндра применительно к условиям индукционного нагрева в предположении, что материал идеально пластический и несжимаем, рассмотрена в работе [6].

Разработана методика приближенного определения электромагнитного поля и джоулева тепла при индукционном нагреве тел с плоскими границами [23], которая основана на использовании специфических особенностей распространения электромагнитного поля в металлических средах.

Рассмотрены два характерные варианта расчетных схем решения задач об индукционном нагреве тонких электропроводных оболочек, которые соответствуют условиям приповерхностного нагрева [2, 14] и глубине проникновения индукционных токов больше толщины оболочки [11, 15]. В первом случае использованы представления искоемых решений в виде разложений в ряды по собственным функциям соответствующих краевых задач. Во втором случае электропроводная оболочка заменяется физической поверхностью с приведенными электромагнитными характеристиками материала [15].

Уточненная постановка и расчетная схема решения задачи о термоупругом состоянии электропроводных тел, учитывающая периодический характер изменения во времени джоулева тепла, пондеромоторные силы и связанность полей деформации и температуры, содержится в работе [17]. В работе [11] показано, что для всех частот электромагнитного поля, за исключением окрестностей определенных (резонансных), распределение температуры и напряжений можно находить, исходя из расчетной схемы, применяемой обычно при решении задач индукционного нагрева.

Постановка и решение задачи об определении оптимальных по напряжениям режимов индукционного нагрева по толщине электропроводных упругих тонких и толстых пластин приведены в работах [9, 10]. Решения найдены с использованием методов вариационного исчисления на основе минимизации функционала энергии упругой деформации. В обоих случаях

установлено, что в оптимальном режиме индукционного нагрева необходимо исходить из напряженности электрического поля постоянной амплитуды, равной допустимой. Проведенные исследования термоупругого состояния электропроводных тел систематизированы в монографии [28].

**Магнитоупругие процессы при периодическом силовом нагружении.** В работах [12, 22, 24] на основе линеаризованных уравнений магнитоупругости проведены дальнейшие исследования магнитоупругих волн и выделенного при их протекании джоулева тепла в электропроводных телах с плоскими границами. В частности, установлено, что изменением направления и величины внешнего магнитного поля, частоты и направления действия силового нагружения можно эффективно влиять на интенсивность и распределение по объему джоулева тепла и таким образом регулировать магнитоакустический нагрев электропроводных тел. В работе [13] предложен подход к решению нелинейных уравнений магнитоупругости. В рамках первого приближения по малому параметру исследованы установившиеся магнитоупругие волны второй гармоники и «медленные» магнитоупругие процессы в электропроводном полупространстве, на поверхности которого действует равномерно распределенная гармоническая во времени силовая нагрузка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в деформируемом теплоэлектропроводном твердом теле.— ФХММ, 1966, № 4, с. 371—377.
2. Бурак Я. И. Определение температурных полей и напряжений в тонких электропроводных оболочках при индукционном нагреве.— Труды IV Всесоюз. конф. по прочности и пластичности. М., 1971, с. 337—344.
3. Бурак Я. И., Галапац Б. П. Влияние концентрации напряжений на распределение зарядов и электрического поля в электропроводных твердых телах.— ФХММ, 1968, № 4, с. 390—395.
4. Бурак Я. И., Галапац Б. П. Уравнения электроупругости тонких электропроводных пластин.— Прикл. механика, 1971, 7, № 1, с. 68—74.
5. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидець Б. М. Об ультразвуковом нагреве электропроводных тел.— Проблемы машиностроения, 1977, вып. 4, с. 6—10.
6. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Колодий Б. И. Упруго-пластическое равновесие бесконечного цилиндра при индукционном нагреве.— Прикл. механика, 1968, 4, № 1, с. 29—39.
7. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Пеленский Р. А. Теоретические основы расчета распределения объемных и поверхностных зарядов в микроэлектронных и термоэлектрических устройствах.— Теор. электротехника, 1976, вып. 20, с. 74—84.
8. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Подстригач Я. С. Исходные уравнения теории деформации неполяризованных электропроводных твердых тел.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., 1974, с. 167—178.
9. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р. Оптимальные по напряжениям режимы индукционного нагрева тонкой пластины.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 93—98.
10. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р. Оптимальные по термонапряжениям режимы индукционного нагрева электропроводного слоя.— Прикл. механика, 1976, 12, № 11, с. 56—61.
11. Бурак Я. И., Гачкевич О. Р., Чернявська Л. В. Температурні поля і напруження в електропровідних тілах при індукційному нагріві.— Вісн. АН УРСР, 1975, № 4, с. 47—54.
12. Бурак Я. И., Колодий Б. И., Кондрат В. Ф. Задача магнитоупругости для линейного источника ультразвука<sup>n</sup> на поверхности полупространства.— Отбор и передача информации, 1974, вып. 42, с. 38—44.
13. Бурак Я. И., Колодий Б. И., Кондрат В. Ф. Нелинейные магнитоупругие колебания электропроводного полупространства.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 70—73.
14. Бурак Я. И., Чернявская Л. В. Определение джоулева тепла, температурных полей и напряжений в тонких электропроводных оболочках, находящихся в условиях приповерхностного индукционного нагрева.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 2, с. 101—107.
15. Бурак Я. И., Чернявская Л. В. Осесимметричный индукционный нагрев цилиндрической оболочки.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 79—84.
16. Галапац Б. П., Юзевич В. Н. Влияние контактных явлений на упруго-деформированное состояние электропроводных тел.— ФХММ, 1977, № 3, с. 86—90.
17. Гачкевич А. Р. О влиянии периодического во времени изменения джоулева тепла и пндеромоторных сил на температуру и напряжения в электропроводных телах.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 84—89.
18. Гачкевич А. Р., Лопушанский Я. И. Температурные поля и термоупругое состояние биметаллического слоя в установившемся электромагнитном поле.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 54—60.
19. Гнидець Б. М. Варіаційна форма рівнянь моделі деформованого електропровідного л-компонентного твердого розчину.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 7, с. 604—608.

20. Гнидец Б. М. Определение равновесного состояния деформируемого электропроводящего твердого раствора.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 76—82.
21. Колодий Б. И. Определение температурных полей и напряжений в полом цилиндре при индукционном нагреве.— Прикл. механика, 1969, 5, № 10, с. 35—41.
22. Колодий Б. И., Кондрат В. Ф. Определение мощности тепловых источников при магнитозвуковом нагреве полубесконечного тела и слоя.— ФХОМ, 1974, № 1, с. 24—29.
23. Колодий Б. И., Чорный Б. И. Приближенный метод определения джоулева тепла при индукционном нагреве электропроводящих тел с плоскими границами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 15—20.
24. Кондрат В. Ф. Магнитоупругие волны и джоулево тепло в электропроводном полупространстве при периодическом силовом нагружении.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 42—47.
25. Подстригач Я. С. Диффузионная теория неупругости металлов.— ПМТФ, 1965, № 2, с. 67—72.
26. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й. Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з урахуванням електромагнітних процесів.— Вісн. АН УРСР, 1970, № 12, с. 18—31.
27. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М. Исходные уравнения теории деформации электропроводящих твердых растворов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 22—29.
28. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. Термоупругость электропроводящих тел. К., «Наук. думка», 1977. 247 с.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
26.X 1976 г.

УДК 534.21 : 538.6

М. М. Сидляр, В. А. Столяров, П. С. Червинко

**О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ НЕОГРАНИЧЕННОЙ  
УПРУГОЙ ОБЛАСТИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ  
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛОВОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Рассмотрим распространение волн в упругой изотропной неограниченной среде с цилиндрической полостью при действии массовых сил. Пусть полость заполнена жидкостью и среда находится в постоянном магнитном поле. В работе [4] рассмотрена задача о распространении магнитоупругих волн в идеально и слабо проводящей средах. В настоящей работе изучается среда с конечной проводимостью с учетом влияния полости на распространение магнитоупругих волн.

Для решения задачи используем две группы уравнений [2, 4]. Первая состоит из уравнений электродинамики медленно движущихся сред

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\vec{j} = \sigma_0 \left[ \vec{E} + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B} \right) \right], \quad (3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (4)$$

где  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  — векторы напряженностей магнитного и электрического полей;  $\vec{j}$  — вектор плотности тока;  $\vec{u}$  — вектор перемещения;  $c$  — скорость света;  $\sigma_0$  — электропроводность. Вторую группу составляют: для магнитоупругой среды — дополненные членами, связанными с силами Лоренца, уравнения Ляме

$$GV^2 \vec{u} + (\lambda + G) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}) - \rho_e \vec{E} - \vec{F}, \quad (5)$$