

$$\gamma(\tau_1, \tau_2) = d_T^{e_c} \left\{ 1 \mp \sqrt{\frac{\gamma_i^c \gamma_c^t}{\gamma_{c,t}}} [1 - E_1(\tau_1, \tau_2)] \right\}, \quad E_1 = \exp[-(\tau_1 + \tau_2) m_1]$$

$$E_2 = \exp[-(\tau_1 + \tau_2) m_2].$$

Здесь реологические константы m_1 , m_2 учитывают механизм релаксации обусловленный релаксацией сдвиговых и объемных напряжений, а безразмерные параметры γ_i^c , γ_c^t , $\gamma_{c,t}$ полностью определяются удельными теплоемкостями, релаксирующими и нерелаксирующими модулями при различных термодинамических процессах [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроот С. де, Мазур М. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964. 456 с.
2. Дей У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М., «Мир», 1974. 190 с.
3. Ильющин А. А., Победря Б. Е. Основы математической термовязкоупругости. М., «Наука», 1970. 480 с.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974. 338 с.
5. Подстригач Я. С. Дифференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі.— Допов. АН УРСР, 1961, № 2, с. 169—172.
6. Подстригач Я. С. Диффузионная теория неупругости металлов.— ПМТФ, 1965, № 2, с. 67—72.
7. Подстригач Я. С. Об одной нелокальной теории деформирования твердых тел.— Прикл. механика, 1967, 3, № 2, с. 71—76.
8. Подстригач Я. С., Павлина В. С. Диффузионные процессы в упруговязком деформируемом теле.— Прикл. механика, 1974, 10, № 2, с. 45—53.
9. Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С., Дасюк Я. И. О рассеянии механической энергии в деформируемом твердом теле при термодиффузионных процессах.— Проблемы прочности, 1973, № 1, с. 3—8.
10. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах. М., «Металлургия», 1974. 351 с.
11. Седов Л. Н. Механика сплошной среды. Т. 1. М., «Наука», 1970. 492 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.IX 1976 г.

УДК 531.01 : 536.424

В. И. Асташкин, Я. И. Бурак

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ n-КОМПОНЕНТНОГО ТВЕРДОГО РАСТВОРА ПРИ АЛЛОТРОПИЧЕСКОМ ПРЕВРАЩЕНИИ

Для придания металлическим материалам требуемых свойств и структуры широко используют аллотропическое превращение, которое имеет ряд характерных черт, присущих ему как фазовому переходу первого рода. В частности, если рассматривать превращение фазы A в фазу B при равномерном понижении температуры, то превращение начинается при температуре T_A , когда в матрице старой фазы возникают зародыши размером более критического, которые не взаимодействуют между собой. Такое состояние, как и в работе [14], назовем фазой (A, b) . Далее зародыши подрастают и образуются новые. При некоторой температуре T_K они приходят в контакт между собой и образуют каркас, в порах которого находится не взаимодействующие частицы исходной фазы. Это состояние назовем фазой (B, a) . Заканчивается процесс при определенной температуре T_B полным превращением исходной фазы в новую. В общем случае твердофазное превращение связано с изменением не только температуры, но и других параметров термодинамического состояния, например таких как механические напряжения, которые возникают при этом превращении [6, 12].

Теоретические исследования гетерофазных превращений берут свое начало от классических работ Гиббса [4]. Кинетика превращений рассмотрена

в работах [7, 14]. Отдельные вопросы взаимосвязи напряженно-деформированного состояния и объемного превращения твердых тел изучены в работах [5, 12]. В настоящей работе в рамках макроскопического подхода предложена конкретная теоретическая модель для описания деформации n -компонентного твердого раствора при аллотропическом превращении.

Будем исходить из термодинамической системы, которая в каждый момент времени состоит из макроскопических подсистем фаз (A, b) и (B, a) , отделенных друг от друга подвижной макроскопической границей. В каждой из подсистем, кроме деформации, имеют место процессы теплопроводности, объемного аллотропического превращения, изменения межфазной поверхности и диффузии. Как обратимые, рассматриваем процесс деформации, аллотропическое превращение и изменение межфазной поверхности. Для макроскопического описания названных явлений во взаимосвязи воспользуемся методикой и подходом, развитыми в работах [8—11, 13].

Термодинамическое состояние физически бесконечно малых элементов фаз (A, b) и (B, a) будем характеризовать следующими параметрами состояния: температура T — удельная энтропия S ; тензор деформаций \hat{e} — тензор напряжений $\hat{\sigma}$; степень полноты фазового превращения Ξ — удельное сродство превращения A ; межфазная поверхность в единице массы Ω — межфазная поверхностная энергия Σ ; концентрация i -й компоненты C_i — химический потенциал M_i . Для описания термодинамического состояния используем удельную свободную энергию F , которую в фазе (A, b) обозначим через F_A , а в фазе (B, a) через F_B .

Условием перехода $(A, b) \rightarrow (B, a)$ будет равенство

$$F_A = F_B = F^*, \quad (1)$$

где F^* — критическое значение свободной энергии системы на границе раздела фаз $(A, b) \rightarrow (B, a)$.

Для подсистемы (A, b) имеем следующее модифицированное уравнение Гиббса:

$$dF_A = -SdT + \frac{1}{\rho} \sigma_{pq} de_{pq} + Ad\Xi + \Sigma d\Omega + \sum_{i=1}^{n-1} M_i dC_i \quad (2)$$

(ρ — плотность фазы (A, b)).

При малых отклонениях состояния фазы (A, b) от фиксированного равновесного ($T = T_{A0}$, $S = S_{A0}$; $e_{pq} = (e_{pq})_{A0}$, $\sigma_{pq} = (\sigma_{pq})_{A0}$; $\Xi = \Xi_{A0}$, $A = A_{A0}$; $\Omega = \Omega_{A0}$, $\Sigma = \Sigma_{A0}$; $C_i = C_{i0}^A$, $M_i = M_{i0}^A$), соответствующего условиям (1) перехода $(A, b) \rightarrow (B, a)$, в рамках линейного приближения имеем следующую систему уравнений состояния:

$$s = S - S_{A0} = \frac{C_i}{T_{A0}} t + \frac{1}{\rho} K_{\alpha e} - K_{t\xi} \xi - K_{t\omega} \omega - \sum_{i=1}^{n-1} d_i c_i, \\ \sigma_{pq} = (\sigma_{pq})_{A0} + K \left(e - \alpha t - \beta \xi - \gamma \omega - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i c_i \right) \delta_{pq} + 2G \left(e_{pq} - \frac{1}{3} \delta_{pq} e \right), \quad (3)$$

$$a = A - A_{A0} = K_{\xi \xi} \xi + K_{t\xi} t - \frac{1}{\rho} K_{\beta e} + K_{\xi \omega} \omega + \sum_{i=1}^{n-1} K_{c_i^t} c_i,$$

$$\sigma = \Sigma - \Sigma_{A0} = K_{\omega \omega} \omega + K_{t\omega} t - \frac{1}{\rho} K_{\gamma e} + K_{\xi \omega} \xi + \sum_{i=1}^{n-1} K_{c_i^t} c_i,$$

$$\mu_i = M_i - M_{i0}^A = \sum_{j=1}^{n-1} d_{ij} c_j + d_i t - \frac{1}{\rho} K_{\theta_i e} + K_{c_i^t} \xi + K_{c_i \omega} \omega.$$

В уравнениях (3) $t = T - T_{A0}$, $e_{pq} = (e_{pq})_{\text{полн}} - (e_{pq})_{A0}$,

$$e = e_{qq}, \quad \xi = \Xi - \Xi_{A0}, \quad \omega = \Omega - \Omega_{A0}, \quad c_i = C_i - C_{i0}^A.$$

Постоянные, входящие в эти уравнения, являются характеристиками модели в фазе (A, b). Для подсистемы (B, a) уравнения состояния имеют аналогичный вид.

Балансовые соотношения для рассматриваемой модели включают в себя следующие уравнения:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{d\tau} = -\nu, \quad (4)$$

$$\rho \frac{dC_i}{d\tau} = -\operatorname{div} \vec{J}_i, \quad (5)$$

$$\rho \frac{d\Omega}{d\tau} = -\lambda, \quad (6)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{d\tau} = \operatorname{Div} \hat{\sigma}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho A \varepsilon) = -\operatorname{div} (\rho A \varepsilon \vec{V}) + \lambda \Sigma, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \Sigma \Omega) = -\operatorname{div} (\rho \Sigma \Omega \vec{V}) + \lambda \Sigma, \quad (9)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{J}_W. \quad (10)$$

Здесь уравнение (4) характеризует перераспределение масс при объемном превращении, (5) — процесс диффузии, (6) — изменение межфазной поверхности при превращении, (7) — закон сохранения количества движения (уравнение движения), (8), (9) — уравнения баланса энергии обратимых фазового перехода и изменения межфазной поверхности, (10) — уравнение сохранения полной энергии. В уравнениях (4) — (9) функция ν определяет возникновение новой фазы в матрице исходной, \vec{J}_i — диффузионный поток i -й компоненты, λ — удельная скорость изменения межфазной поверхности. В уравнении (10) $W = \rho \left(U + \frac{V^2}{2} + A \varepsilon + \Sigma \Omega \right)$ — полная энергия, состоящая из удельных внутренней ρU и кинетической $\rho \frac{V^2}{2}$, энергии фазового перехода $\rho A \varepsilon$ и энергии межфазной поверхности $\rho \Sigma \Omega$, $\vec{J}_W = \vec{J}_Q - \hat{\sigma} \cdot \vec{V} + W \vec{V}$ — поток полной энергии, в который входят тепловой поток \vec{J}_Q , поток энергии, обусловленный работой поверхностных сил $\hat{\sigma} \cdot \vec{V}$, и конвективный поток полной энергии $W \vec{V}$.

Уравнение баланса энтропии следует из уравнения сохранения полной энергии (10), соотношений (7) — (9), уравнения Гиббса и записывается в виде

$$\rho \frac{dS}{d\tau} = -\operatorname{div} \vec{J}_S + \sigma_S, \quad (11)$$

где \vec{J}_S — поток энтропии; σ_S — производство энтропии;

$$\begin{aligned} \vec{J}_S &= \frac{1}{T} \left(\vec{J}_Q + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \vec{J}_i \right), \\ \sigma_S &= \vec{X}_Q \cdot \vec{J}_Q + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{X}_i \cdot \vec{J}_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно линейной теории Онзагера,

$$\vec{J}_Q = L_{QQ} \vec{X}_Q + \sum_{i=1}^{n-1} L_{Qi} \vec{X}_i, \quad (13)$$

$$\vec{J}_i = \sum_{j=1}^{n-1} L_{ji} \vec{X}_j + L_{iQ} \vec{X}_Q,$$

где $\vec{X}_Q = -\frac{1}{T} \operatorname{grad} T$; $\vec{X}_i = -T \operatorname{grad} \frac{M_i}{T}$.

Условия связности на границе раздела (A, b) — (B, a), полученные по методике [3, 13], включают в себя следующие уравнения:

$$\rho_A \left(\vec{V}_A - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A = \rho_B \left(\vec{V}_B - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A, \quad (14)$$

где $\frac{d\vec{R}}{d\tau}$ — вектор скорости перемещения границы раздела; \vec{n}_A — внешняя к поверхности (A, b) нормаль;

$$\rho_A \vec{V}_A \left(\vec{V}_A - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A + \hat{\sigma}_A \cdot \vec{n}_A = \rho_B \vec{V}_B \left(\vec{V}_B - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A + \hat{\sigma}_B \cdot \vec{n}_A, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \rho_A W_A \left(\vec{V}_A - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A + (\vec{V}_A \cdot \hat{\sigma}_A) \cdot \vec{n}_A + \vec{J}_Q^A \cdot \vec{n}_A = \\ = \rho_B W_B \left(\vec{V}_B - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A + \vec{J}_Q^B \cdot \vec{n}_A + (\vec{V}_B \cdot \hat{\sigma}_B) \cdot \vec{n}_A, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\rho_A C_i^A \left(\vec{V}_A + \vec{v}_i^A - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A = \rho_B C_i^B \left(\vec{V}_B + \vec{v}_i^B - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A. \quad (17)$$

Здесь \vec{v}_i^A и \vec{v}_i^B — скорости диффузии i -й компоненты в (A, b) и (B, a), которые могут быть найдены из соотношений

$$\vec{J}_i = \rho C_i (\vec{v}_i - \vec{V}), \quad (18)$$

$$\rho_A \Xi_A \left(\vec{V}_A - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A = \rho_B \Xi_B \left(\vec{V}_B - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A, \quad (19)$$

$$\rho_A \Omega_A \left(\vec{V}_A - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A = \rho_B \Omega_B \left(\vec{V}_B - \frac{d\vec{R}}{d\tau} \right) \cdot \vec{n}_A. \quad (20)$$

В уравнениях (14) — (20) индекс « A » относится к фазе (A, b), а « B » — к фазе (B, a). Записанные соотношения выражают условие сопряжения на границе для массы (14), количества движения (15), полной энергии (16), растворенных компонент (17), степени полноты (19) и межфазной поверхности (20).

Из предложенной модели как частный случай следует модель деформированного n -компонентного твердого раствора [11], а также сформулированная ранее [1, 2] модель для описания процесса кристаллизации одно- и двухкомпонентной систем.

ПИТЕРАТУРА

1. Асташкин В. И., Бурак Я. И. Уравнение термодинамической теории процесса кристаллизации однокомпонентной системы. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 11—16.
2. Асташкин В. И., Бурак Я. И. К исследованию физико-механических процессов в бинарной системе при фазовом превращении 1-го рода. — ФХММ, 1976, № 2, с. 96—102.
3. Вильямс Ф. А. Теория горения. М., «Мир», 1971. 615 с.
4. Гиббс Дж. В. Термодинамические работы. М., Гостехиздат, 1951. 492 с.
5. Кривоглаз М. А. Теория затухания упругих колебаний в двухфазных смесях. — ФММ, 1960, 10, № 4, с. 497—506.
6. Курдюмов Г. В. Явления закалки и отпуска стали. М., Metallurgizdat, 1960. 64 с.
7. Любов Б. Я. Теория кристаллизации в больших объемах. М., «Наука», 1975. 256 с.
8. Підстригач Я. С. Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі. — Допов. АН УРСР, 1961, № 2, с. 169—173.
9. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й. Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з урахуванням електромагнітних процесів. — Вісн. АН УРСР, 1970, №12, с. 18—31.
10. Підстригач Я. С., Павлина В. С. Основные уравнения плоской задачи термодиффузии. — Прикл. механика, 1965, № 3, с. 101—106.
11. Підстригач Я. С., Павлина В. С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n -компонентном твердом растворе. — ФХММ, 1965, № 4, с. 383—389.

12. *Ройтбурд Л. А.* Теория деформирования гетерофазной структуры при фазовых превращениях в твердом состоянии.— УФН, 1974, 10, № 1, с. 69—104.
13. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М., «Наука», 1973. 535 с.
14. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. Л., «Наука», 1975. 592 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
16.X 1976 г.

УДК 532.72 : 532.135

В. С. Павлина

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В УПРУГОВЯЗКИХ ТЕЛАХ

Материалы деталей машин, аппаратов современной техники находятся, как правило, в сложных условиях эксплуатации и их прочность, деформативность и во многих случаях не менее важный строго определенный химический состав (распределение компонент, фаз и т. п.) зависят от действия всей совокупности таких факторов, как механические нагрузки, повышенные температуры, агрессивные среды и т. п. Это означает, что деформация и разрушение материалов определяются не только приложенными нагрузками, но являются следствием происходящих в них сложных физико-химических процессов, а интенсивность и даже существование последних в значительной степени зависят от уровня и вида механических усилий. Поэтому если раньше механика деформируемого тела при решении практически важных задач ограничивалась сравнительно простыми представлениями относительно его свойств, то теперь речь должна идти об усложнении и усовершенствовании исследуемых моделей. Дальнейшее развитие в этом направлении, в особенности разработка теории процесса деформирования, в первую очередь связано с привлечением физических представлений о внутреннем состоянии твердых тел и свойственных им необратимых процессов.

Построение моделей деформируемых тел с учетом физико-химических явлений целесообразно производить на основании методов механики сплошной среды [7] и положений неравновесной термодинамики [1]. Взаимосвязанная система уравнений для описания процесса деформации, теплопроводности и диффузии с учетом химических реакций для идеальных жидкостей на основании такого подхода получена в работе [8]. Автором [3] проведен некоторый анализ исходных положений о деформации тел при наличии химических превращений. Исследованию взаимовлияния процессов деформации и химических реакций в упруговязком теле (модель Максвелла) посвящена работа [2]. Формулировка краевой задачи для упруговязких тел с учетом диффузии и теплопроводности осуществлена в работе [6]. В данной статье приведены соответствующие результаты для случая многокомпонентной диффузии и наличия химических реакций.

Рассмотрим n_1 -компонентный твердый раствор, в котором происходят $N \leq n_1$ химических реакций (реакций взаимного превращения). Для этой модели введем параметры: σ_{ij} , p_{ij} и e_{ij} , ϵ_{ij} — компоненты тензоров суммарных (вязких + упругих), упругих напряжений и деформаций соответственно; T и S — температура и энтропия; μ^k и c^k — химический потенциал и концентрация k -компоненты растворенного вещества ($k = 1, 2, \dots, n_1$). Постулируем, что термодинамическое состояние модели определяется компонентами тензоров p_{ij} или ϵ_{ij} и величинами μ^k , T или c^k , S . Поэтому для внутренней энергии U как функции состояния упруговязкого твердого раствора имеем

$$U = U(\epsilon_{ij}, S, c), \quad c = (c^1, c^2, \dots, c^{n_1}) \quad (1)$$