7. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя.— ИФЖ, 1963, 6, № 10, с. 129—136.
8. *Подстригач Я. С., Воробец Б. С., Чернуха Ю. А.* К термоупругой задаче для тел с включениями.— Прикл. механика, 1972, 8, № 12, с. 80—85.
9. *Подстригач Я. С., Караванский О. В.* К расчету температурных полей в тонкостенных ребристых элементах конструкций.— В кн.: Исследования по теплопроводности. Минск, 1967, с. 454—465.
10. *Подстригач Я. С., Войтович Н. И., Чернуха Ю. А.* Температурные поля криволинейных стержней и подкрепленных оболочек.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 15—20.
11. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Условия теплообмена на подкрепленном крае многослойной оболочки.— Мат. мет. и физ.-мех. поля, 1977, вып. 6, с. 7—9.
12. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций.— В кн.: Теория оболочек и пластин. Л., 1975, с. 82—85.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.IX 1976 г.

УДК 539.3

Б. Л. Пелех

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ

В последнее время возник интерес к контактным задачам для тонкостенных элементов (стержней, пластин, оболочек). Имеются в виду следующие классы задач: о взаимодействии упругих тонких элементов с твердыми жесткими телами (штампами, подкрепляющими бандажами, ребрами жесткости), о упругом контакте оболочек и пластин между собой, о сопряжении континуумов разных измерений (оболочка либо пластинка — массивное упругое тело). Такие задачи принято называть нетрадиционными в том смысле, что известные допущения Герца о малости области контакта в рамках трехмерной постановки проблемы здесь неприменимы [1, 11].

К указанным классам задач сводятся также задачи о напряженном состоянии тел с упругими покрытиями, наносящимися на поверхность деталей для увеличения долговечности и защиты их от коррозии. Фундаментальные результаты в этом направлении с учетом диффузионных процессов в системе тело — покрытие получены Я. С. Подстригачем и его учениками [9, 10].

В работах [2, 3, 7] установлено, что результат решения контактных задач рассматриваемых классов качественно зависит от выбора кинематических и статических моделей, описывающих состояние тонкостенных элементов. В частности, применение классических гипотез Кирхгофа — Лява приводит к результатам, противоречащим физической сущности задач [5, 6].

Обсудим возможности новых постановок и решений контактных задач указанных классов с учетом предположения о наличии в зонах контактирующих тел промежуточных поверхностных слоев *, свойства которых отличаются от свойств элементов, находящихся в упругом контакте, и покажем, что введение таких слоев в некотором случае эквивалентно обобщениям моделей состояния упругих элементов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим взаимодействие твердых жестких тел с упругими элементами, как свободными, так и связанными с массивными упругими телами (основаниями). Будем считать, что верхний слой упругого элемента, находящийся в контакте с твердым телом, обладает особыми

* В рамках трехмерной постановки впервые обобщение контактных задач на случай наличия слоев, отображающих деформации реальных микронеровностей поверхностей контактирующих тел, дано в работе [13].

свойствами, отличными от свойств самого элемента (эти свойства будут определены ниже). Предположение о наличии таких слоев оправдано в связи с особенностями микроструктуры поверхностных слоев [13].

Перейдем к математическому описанию состояния составляющих сложной системы тонкий упругий элемент (оболочка, пластинка, стержень) - поверхностный слой — упругое тело и постановке граничных условий.

Тонкостенный элемент. Напряженно-деформированное состояние упругих тонких элементов будем описывать классической теорией Кирхгофа—Лява либо обобщенной теорией с учетом деформаций трансверсального сдвига (теорией типа Тимошенко). В первом случае для оболочки записываем разрешающие уравнения вида

$$L_{1j}^{(\text{кл})}u_1 + L_{1}^{(\text{кл})}u_2 + L_{13}^{(\text{кл})}u_3 + L^{(\text{кл})}\theta_1 = q_j - p_j, \quad (1)$$

а во втором — уравнения

$$L_{1j}u_1 + L_{2j}u_2 + L_{3j}u_3 + L_{4j}\gamma_1 + L_{5j}\gamma_2 = q_j - p_j, \quad (2)$$

где u_j $(j = 1, 2, 3)$ — компоненты упругого перемещения в главных направлениях x_j, γ_j $(j = 1, 2)$ — углы поворота нормального волокна; q_j, p_j — интенсивности нормальных и касательных контактных напряжений в зонах жесткого и упругого контакта; $L_{ij}^{(\text{кл})}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, L_{ij} $(i, j = 1, ..., 5)$ — известные дифференциальные операторы классической [2] и обобщенной [4] теорий оболочек.

Поверхностный слой. В работе [13] к описанию состояния поверхностного слоя применяется следующая модель: считается, что его наличие приводит к дополнительному нормальному смещению в контактной зоне, которое пропорционально неизвестному контактному давлению:

$$u_3^c = kq, \quad (3)$$

где k — коэффициент податливости поверхностного слоя, зависящий от его структуры.

Введем предположение о том, что состояние поверхностного слоя описывается одним уравнением теории упругости относительно нормального к срединной поверхности слоя перемещения, а остальные перемещения могут быть приняты равными нулю. Покажем, что в простейших случаях это предположение приводит к результату (3).

Упругое основание. К описанию состояния последних естественно применить уравнения трехмерной теории упругости.

Граничные условия. Поверхности контакта слоя с твердым телом и основным упругим элементом обозначим через G_c^+ и G_c^-, осадку штампа через δ и уравнение поверхности его основания через $f(x_j)$. Тогда

$$u_3^c = u_3 \text{ на } G_c^-, \quad \sigma_{x_3}^c = q \text{ на } G_c^+, \quad (4)$$

$$u_3^c = \delta - f(x_j) \text{ на } G_c^+. \quad (5)$$

Задача заключается в нахождении контактных давлений между твердым телом и упругим тонким элементом, а также напряжений на границе раздела сред.

2. Действие гладкого твердого тела на упругую полуплоскость с покрытием. Рассмотрим плоскую задачу о действии штампа на упругое тело, представляющее полупространство с покрытием (рис. 1). В этом случае известные функции зависят лишь от одной координаты x_1. Следуя намеченному подходу, выпишем уравнения состояния элементов:

а) уравнения равновесия покрытия описываем соотношениями классической теории Кирхгофа

$$D\,\frac{d^2u_3}{dx_1^2} = q_3 - p_3, \quad B\,\frac{d^2u_1}{dx_1^2} = q_1 - p_1, \quad (6)$$

где $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, $B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}$ — жесткости на изгиб и растяжение; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона покрытия; $2h$ — толщина покрытия;

б) состояние поверхностного слоя покрытия описывается одним уравнением теории упругости

$$\frac{d^2u_3^c}{dx_3^2} = 0, \tag{7}$$

решение которого должно удовлетворять условию

$$u_3^c = u_3 \text{ при } x_3 = h - h_c, \; \sigma_3^c = q \text{ при } x_3 = h + h_c, \tag{8}$$

где h_c — толщина поверхностного слоя.

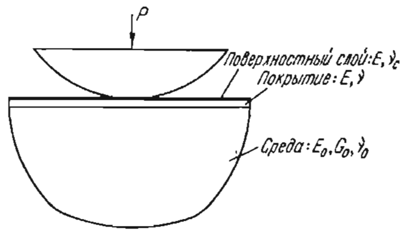

Рис. 1

Найдем функцию Грина для данной задачи. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу о действии произвольно распределенных нормальных $q(x_1)$ и касательных $n(x_1)$ усилий на упругую полуплоскость с покрытием. Такая задача в предположении, что контакт покрытия осуществляется по срединной линии, решена в работе [9] методом интегральных преобразований Фурье. Выражения для трансформант нормальных перемещений $\tilde{u}_3(\lambda)$, нормальных $\tilde{p}(\lambda)$ и касательных $\tilde{t}(\lambda)$ напряжений имеют вид [9]

$$\tilde{u}_3(\lambda) = \frac{1-\nu^2}{E_0|\lambda| D(|\lambda|)} [(g_1(\beta^2-\alpha^2)|\lambda| + 2)\tilde{q} - \alpha \operatorname{sgn}\lambda i\tilde{n}],$$

$$\tilde{p}(\lambda) = \frac{1}{D(|\lambda|)} [(g_1\beta|\lambda| + 1)\tilde{q} + \alpha q_2 \lambda^3 i\tilde{n}], \tag{9}$$

$$\tilde{t}(\lambda) = \frac{1}{D(|\lambda|)} [(g_2\beta|\lambda|^3 \tilde{n} - g_1\alpha\lambda i\tilde{q}].$$

Здесь ядро $D(\lambda)$ определено формулой

$$D(|\lambda|) = g_1 g_2 (\beta^2 - \alpha^2)\lambda^4 + \beta g_2|\lambda|^3 + g_1\beta|\lambda| + 1$$

и введены следующие обозначения:

$$g_1 = \frac{Eh}{E_0}; \quad g_2 = \frac{Eh^3}{2E_0}; \quad \beta = \frac{2(1-\nu_0^2)}{1-\nu^2}; \quad \alpha = \frac{(1-2\nu_0)(1+\nu_0)}{1-\nu^2}.$$

Индексом «0» обозначены упругие характеристики основания (упругой полуплоскости).

Интегрируя уравнение (7), перемещение слоя получаем в виде линейной по x_3 функции:

$$u_3^c = c_0 + c_1 x_3. \tag{10}$$

Подчиняя решение (10) условиям (8) для постоянных c_0 и c_1, получаем

$$c_0 = u_3 - \frac{1-\nu_c^2}{E_c}(h - h_c)q, \quad c_1 = \frac{1-\nu_c^2}{E_c} q.$$

В результате функция u_3^c на $x_3 = h$ будет такой:

$$u_3^c|_{x_3=h} = u_3 + \frac{1-\nu_c^2}{E_c} q[x_3 - (h - h_c)]. \tag{11}$$

Подставляя это выражение в условие (5) и учитывая выражения (9), приходим к парным интегральным уравнениям

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E_0}\int\limits_0^\infty \frac{g_1(\beta^2-\alpha^2)\lambda+\beta}{\lambda D(\lambda)}\,q(x)\cos\lambda x\,d\lambda = \delta - f(x) + k\,q(x) \quad (|x|\leqslant a), \tag{12}$$
$$\int\limits_0^\infty \tilde q(x)\cos\lambda x\,dx = 0 \quad (|x|>a).$$

Полученные уравнения можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$kq(x) + \int\limits_0^a \Omega(x,\ \xi)\,q(\xi)\,d\xi = F(x), \tag{13}$$

где $\Omega(x,\ \xi)$, $F(x)$ — известные функции.

Аналогичный результат при решении такого класса задач можно получить при рассмотрении состояния пластинки по теории, учитывающей поперечный сдвиг [4].

При $k \to 0$ из уравнения (13) получаем интегральные уравнения первого рода, т. е. качественно другой результат.

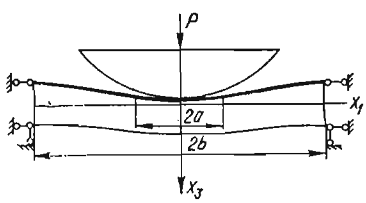

Рис. 2

3. Вынужденный изгиб пластинки с учетом структуры поверхностного слоя. Исследуем влияние поверхностной структуры на характерной задаче о вдавливании жесткого гладкого штампа в поверхность упругой трансверсально-изотропной пластинки, закрепленной по контуру (рис. 2). Такая задача в рамках теории типа Тимошенко решена в работе [5, 6] без учета микроструктуры.

Согласно общей постановке в данном случае задача состоит в нахождении решения уравнений в области контакта

$$D\frac{d^4u_3}{dx_1^4} = q - \varepsilon\frac{d^2q}{dx_1^2}, \quad \frac{d^2\gamma}{dx_1^2} - \frac{1}{\varepsilon}\gamma = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{du_3}{dx_1} \tag{14}$$

и вне этой области ($a \leqslant x_1 \leqslant b$)

$$\frac{d^4u_3}{dx_1^4} = 0, \tag{15}$$

удовлетворяющего условиям

а) непрерывности при переходе через границу области контакта при $x_1 = a$:

$$u_3(a-0) = u_3(a+0),\ \gamma(a-0) = \gamma(a+0),\ M(a-0) = M(a+0), \tag{16}$$
$$Q(a-0) = Q(a+0);$$

б) закрепления на внешнем контуре при $x_1 = b$:

$$u_3 = \gamma = 0, \qquad Q = -\frac{P}{2}, \tag{17}$$

а также решения уравнения для промежуточного контактного слоя

$$\frac{d^2u_3^c}{dx_1^2} = 0,$$

удовлетворяющего условиям (8) и условию безотрывного контакта (4). Выражение для нормального перемещения в слое, как и в п. 2, имеет вид

$$u_3^c = u_3 + \frac{h_c(1-\nu_c^2)}{E_c}\,q\,[x_3 - (h - h_c)]. \tag{18}$$

Прибавив к выписанным соотношениям условие равновесия штампа

$$P = -2\int_0^a q(x_1)\,dx_1,$$

получим замкнутую систему уравнений для определения неизвестного контактного давления, размера области контакта и связи между действующей силой и осадкой.

Подставляя выражения (18) в условие (4), для определения контактного давления получаем следующие уравнения четвертого порядка:

$$Dk\frac{d^4q}{dx_1^4} - \varepsilon\frac{d^2q}{dx_1^2} + q = D\frac{d^4f}{dx_1^4}, \tag{19}$$

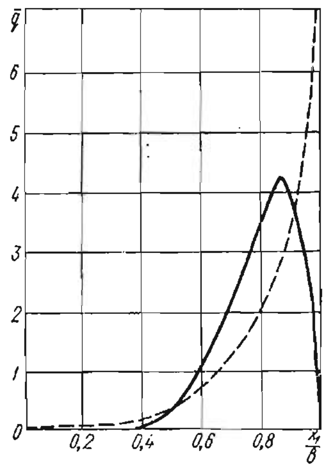

Рис. 3

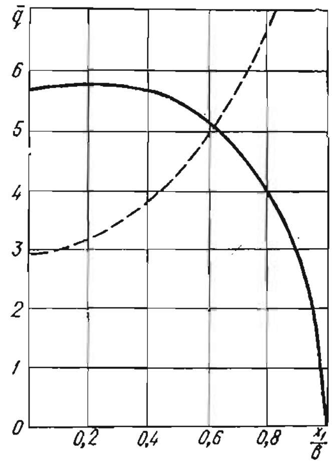

Рис. 4

или

$$\frac{d^4q}{dx_1^4} - \frac{1}{\lambda' k}\frac{d^2q}{dx_1^2} + \frac{1}{Dk}q = D\frac{d^4f}{dx_1^4}, \tag{19'}$$

где $\lambda' = 2k'G'h$ — сдвиговая жесткость пластинки; k' — коэффициент сдвига.

Рассмотрим действие штампа в виде цилиндрического параболоида $f(x_1) = Ax_1^2$. В этом случае $\frac{d^4f_1}{dx_1^4} = 0$ и правая часть уравнения (19) обращается в нуль, а общее его решение с учетом симметрии задачи принимает вид

$$q = c_1 \operatorname{sh} sx_1 \operatorname{sh} rx_1 + c_2 \operatorname{ch} sx_1 \operatorname{ch} rx_1,$$

где

$$s,\ r = \sqrt{\frac{\lambda^2 \pm g^2}{2}}.$$

Постоянные c_1 и c_2 следует находить из условий $q(a) = 0$ и $Q(x-0) = Q(x+0) = -\frac{P}{2}$ при $x_1 = a$. В результате этих действий получим

$$q = \alpha\frac{P}{2b}\left\{\operatorname{sh} sx_1 \operatorname{sh} rx_1 - \frac{\operatorname{sh} sa \operatorname{sh} ra}{\operatorname{ch} sa \operatorname{ch} ra}\operatorname{ch} sx_1 \operatorname{ch} rx_1\right\}. \tag{20}$$

Для сравнения приведем полученные в работе [5] соответствующие выражения для контактного давления

$$q^{(T)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh}\frac{a}{\sqrt{\varepsilon}}} & (x \leqslant a), \\ 0 & (b \geqslant x \geqslant a). \end{cases} \tag{21}$$

На рис. 3, 4 представлены графики изменения контактного давления $\bar{q} = \frac{2bq}{P}$ вдоль области контакта в зависимости от параметров $\frac{h}{b} = 0{,}1$ (рис. 3); 0,5 (рис. 4) и $\frac{a}{b} = 0{,}8$ при $F/G' = 2{,}6$; $\nu = 0{,}25$; $E/E_c = 10$, $h/h_c = 8$. Штриховые кривые соответствуют решению (21) [5, 6]. Из анализа следует, что учет микроструктуры существенен особенно в зонах, примыкающих к границам в области контакта. Отметим, что качественно к таким же результатам можно придти, используя в задачах такого класса теорию, учитывающую кроме деформаций поперечного сдвига нормальные деформации ε_{33} [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Об одной задаче изгиба круглой пластинки.— ПММ, 1948, 11, № 3, с. 48—57.
2. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* О расчете цилиндрических оболочек, загруженных по линиям.— ПММ, 1967, 31, № 6, с. 1141—1146.
3. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактная задача для полубесконечной цилиндрической оболочки.— ПММ, 1971, 35, № 5, с. 801—809.
4. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К., «Наук. думка», 1973. 247 с.
5. *Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.* Об одном классе контактных задач для анизотропных пластин из армированных пластиков.— Механика полимеров, 1972, № 4, с. 346—350.
6. *Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.* Об одной контактной задаче для упругой пластинки.— ДАН УССР. Сер. А, 1972, № 2, с. 253—257.
7. *Пелех Б. Л.* Некоторые особенности постановки и решения контактных задач о взаимодействии упругих цилиндрических оболочек с твердыми жесткими телами.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., 1974, с. 559—566.
8. *Пелех Б. Л., Швабюк В. И.* Об одном обобщении теории упругих трансверсально-изотропных пластин применительно к некоторым контактным задачам.— Сопротивление материалов, 1975, № 26, с. 87—92.
9. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах.— ФХММ, 1967, № 5, с. 573—578.
10. *Подстригач Я. С.* Диффузионная теория деформации твердых тел. Автореф. докт. дис. К., 1968. 28 с.
11. *Филоненко-Бородич М. М.* О вынужденном изгибе стержня по заданной кривой.— Труды МЭМИИТ, 1949, 58, № 41, с. 16—21.
12. *Фюрей М. Дж.* Поверхность раздела твердых тел и истинная площадь контакта.— В кн.: Физико-химическая механика контактного взаимодействия и фреттинг-коррозия. К., 1973, с. 9—10.
13. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949. 270 с.
14. *Шереметьев М. П.* Пластинки с подкрепленным краем. Львов, Изд-во Львов. ун-та, 1962. 260 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
10.X 1976 г.

УДК 532.72 : 620.198

П. Р. Шевчук

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ПОКРЫТИЯМИ

Успешное развитие современных отраслей народного хозяйства связано с решением одной из актуальных проблем — создания новых конструкционных материалов с наперед заданными свойствами, способными достаточно надежно работать в реальных эксплуатационных условиях (агрессивные среды, широкий диапазон изменения температур и давлений и др.). Получение материалов, обладающих целым комплексом полезных свойств, является сложной и не всегда разрешенной задачей. Во многих случаях необходимые полезные свойства можно придать широко используемым материалам