УДК 539.377

Ю. А. Чернуха

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ОРЕБРЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Широкое применение оболочек в качестве элементов конструкций, подвергающихся неравномерным нагревам, и вызванные им интенсивные исследования температурных напряжений в таких элементах обусловили необходимость получения уравнений на усредненные по толщине оболочки характеристики ее температурного поля: среднее значение температуры T и температурный аналог изгибающего момента θ. Предложенный в работах [1, 2] операторный метод сведения трехмерной задачи теплопроводности к двумерной в отличие от других известных в литературе подходов не имеет предварительных предположений о распределении температуры по толщине оболочки и весьма эффективен. Этим методом получены, в частности, уравнения температурных полей многослойных оболочек [6], оболочек с тонкими покрытиями [3] и оболочек, находящихся в условиях облучения [4]. Его применение позволило задачи нестационарной теплопроводности и термоупругости для тел с включениями свести к соответствующим краевым задачам для областей, занятых основным материалом; при этом рассмотрены все три характерных типа включений: линейные, двумерные и объемные [7, 8]. В настоящей работе в развитие указанных дан вывод уравнений теплопроводности оребренных оболочек. В соответствии с хорошо разработанными и широко применяемыми при исследовании напряженно-деформированного состояния таких элементов подходами получены два варианта уравнений теплопроводности, соответствующие усредненному и дискретному учету влияния подкрепляющих элементов на процесс теплопроводности в оболочке. Температурные поля тонкостенных ребристых элементов, симметричные относительно их срединной поверхности, исследованы в работе [9].

1. Исходные соотношения. Рассмотрим оребренную ортотропную оболочку толщиной $2h$, отнесенную к триортогональной системе координатных линий (α, β, γ), являющихся соответственно линиями главных кривизн срединной поверхности и внешней нормалью к ней. За исходное примем уравнение нестационарной трехмерной (по пространственным координатам) задачи теплопроводности

$$\lambda_\gamma \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} + 2\lambda_\gamma k \frac{\partial t}{\partial \gamma} + \nabla^2 t - c \frac{\partial t}{\partial \tau} + w = 0,$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\lambda_\alpha \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\lambda_\beta \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta}\right)\right]. \tag{1}$$

Для описания температуры t_c стержня, ось которого предполагается плоской кривой, уравнение теплопроводности запишем в виде

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t_c}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t_c}{\partial y^2} + k_c\left(\lambda_x \frac{\partial t_c}{\partial x}\cos\varphi + \lambda_y \frac{\partial t_c}{\partial y}\sin\varphi\right) +$$
$$+ \lambda_s \frac{\partial^2 t_c}{\partial s^2} - c_c \frac{\partial t_c}{\partial \tau} + w_c = 0, \tag{2}$$

где Ox, Oy — главные оси поперечного сечения, совпадающие с направлениями ортотропии; s — координата, отсчитываемая вдоль оси стержня; φ — угол, образованный плоскостью оси стержня с осью Ox. В уравнениях (1), (2) и в дальнейшем, если не оговорено специально, используются обозначения, принятые в работах [4, 11].

Теплообмен с окружающей средой со свободных поверхностей оболочки и стержня предполагается описываемым законом Ньютона

$$\left[\lambda_\gamma \frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm \varepsilon_t^{\pm} (t - t_c^{\pm})\right]_{\gamma=\pm h} = 0, \tag{3}$$

$$\left[\lambda_x n_x \frac{\partial t_c}{\partial x} + \lambda_y n_y \frac{\partial t_c}{\partial y} + \varepsilon_c (t_c - t_c^{(c)})\right]_S = 0. \tag{4}$$

Принимаем, что теплообмен между оболочкой и подкрепляющим элементом осуществляется согласно условиям идеального теплового контакта

$$\left[\lambda_x n_x \frac{\partial t_c}{\partial x} + \lambda_y n_y \frac{\partial t_c}{\partial y}\right]_\Gamma = -\lambda_\gamma \frac{\partial t_*}{\partial \gamma}, \tag{5}$$

$$[t_c]_\Gamma = t_*. \tag{6}$$

Здесь t_* — значение температуры оболочки в области контакта.

Введем в рассмотрение усредненные характеристики температурных полей оболочки и стержня:

$$T = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} t d\gamma, \quad \Theta = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^{h} t\gamma d\gamma; \tag{7}$$

$$T_c = \frac{1}{F} \iint_{(D)} t_c dF, \ \Theta_x = \frac{\delta_x}{I_{xx}} \iint_{(D)} t_c y dF, \ \Theta_y = \frac{\delta_y}{I_{yy}} \iint_{(D)} t_c x dF. \tag{8}$$

Следуя методике, изложенной в работах [10, 11], проинтегрируем уравнение (2) по области D поперечного сечения подкрепляющего элемента, используя при этом формулу Грина — Остроградского и соотношения (5) и (8). В результате получим

$$p_c^2 T_c - E_{00} T_c - E_{01}\Theta_x - E_{10}\Theta_y + \frac{\varkappa_x}{R_x}\Theta_y + \frac{\varkappa_y}{R_y}\Theta_x + B_{00} = \lambda_\gamma \int_{-a}^{a} \frac{\partial t_*}{\partial \gamma} d\zeta, \tag{9}$$

$$p_c^2\left(a_x\Theta_x - \frac{y_0}{\delta_x} T_c\right) - E_{01}T_c - E_{02}\Theta_x - E_{11}\Theta_y - \frac{1}{R_y}\Theta_x + B_{01} +$$
$$+ \frac{y_0}{\delta_x}\left(E_{00}T_c + E_{01}\Theta_x + E_{10}\Theta_y - \frac{\varkappa_x}{R_x}\Theta_y - \frac{\varkappa_y}{R_y}\Theta_x - B_{00}\right) =$$
$$= \frac{\lambda_\gamma \cos\varphi}{\delta_x} \int_{-a}^{a} \frac{\partial t_*}{\partial \gamma} \zeta d\zeta,$$

$$p_c^2\left(a_y\Theta_y - \frac{x_0}{\delta_y} T_c\right) - E_{10}T_c - E_{11}\Theta_x - E_{20}\Theta_y - \frac{1}{R_x}\Theta_y + B_{10} +$$
$$+ \frac{x_0}{\delta_y}\left(E_{00}T_c + E_{01}\Theta_x + E_{10}\Theta_y - \frac{\varkappa_x}{R_x}\Theta_y - \frac{\varkappa_y}{R_y}\Theta_x - B_{00}\right) =$$
$$= -\frac{\lambda_\gamma \sin\varphi}{\delta_y} \int_{-a}^{a} \frac{\partial t_*}{\partial \gamma} \zeta d\zeta,$$

где $2a$ — ширина площадки контакта;

$$p_c^2 = \Lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} - C_c \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Далее необходимо принять предположение о распределении температуры в области контакта. Для получения простейшего варианта искомых уравнений будем пренебрегать неравномерностью температурного поля по ширине зоны контакта. В этом случае из первого соотношения (9), используя теорему о среднем значении интеграла, а также условие (6) и формулы

(8), находим

$$\lambda_\gamma \frac{\partial t_*^\pm}{\partial \gamma} = \pm \frac{1}{2a^\pm} \{[(p_c^2)^\pm - E_{00}^\pm] t_*^\pm + B_{00}^\pm\}. \quad (10)$$

Здесь знаки «$\pm$» соответствуют случаям расположения ребер на поверхностях оболочки $\gamma = \pm h$.

2. **Усредненный учет влияния подкрепляющих элементов.** Рассмотрим оболочку с регулярно расположенными подкрепляющими элементами. Расстояние между соседними ребрами обозначим через $2b$. Поставим ей в соответствие некоторую гладкую (не оребренную) оболочку. Из условия эквивалентности потоков в направлении нормали к срединным поверхностям этих оболочек, используя соотношения (3) и (10), получаем

$$\left\{\lambda_\gamma \frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm \left(1 - \frac{a^\pm}{b^\pm}\right) \varepsilon_t^\pm (t - t_c^\pm) \mp \frac{1}{2b^\pm} [(p_c^2)^\pm - E_{00}^\pm] t \mp \frac{1}{2b^\pm} B_{00}^\pm\right\}_{\gamma=\pm h} = 0.$$

При дальнейших упрощениях это условие можно записать в виде

$$\left[\lambda_\gamma \frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm \varepsilon_*^\pm (t - t_c^\pm) \mp \frac{1}{2b^\pm} (p_c^2)^\pm t \mp Q_*^\mp\right]_{\gamma=\pm h} = 0, \quad (11)$$

$$\varepsilon_*^\pm = \left(1 - \frac{a^\pm}{b^\pm}\right) \varepsilon_t^\pm + \frac{1}{2b^\pm} \varepsilon_c^\pm L_c^\pm, \quad Q_*^\pm = \frac{1}{2b^\pm} \iint\limits_{(D)} w_c^\pm dF, \quad (12)$$

где L_c — длина той части контура поперечного сечения стержня, которая омывается внешней средой.

Если решение уравнения (1), найденное операторным методом с использованием соотношений (7) [4], подставим в условия (11), то для определения величин T и Θ получим следующую систему уравнений бесконечно высокого порядка:

$$\Psi_2^\pm (\eta_1, \eta_2) (T - T_*) - \Phi_2^\pm (\eta_1, \eta_2) (\Theta - \Theta_*) \mp \chi_2^\pm (\eta_1, \eta_2, w) \pm \frac{h}{\lambda_\gamma} \times$$
$$\times \left[\varepsilon_*^\pm - \frac{1}{2b^\pm} (p_c^2)^\pm\right] [\Psi_1^\pm (\eta_1, \eta_2) (T - T_*) - \Phi_1^\pm (\eta_1, \eta_2) (\Theta - \Theta_*) \mp$$
$$\mp \chi_1^\pm (\eta_1, \eta_2, w)] = \pm \frac{h}{\lambda_\gamma} (\varepsilon_*^\pm t_c^\pm + Q_*^\pm). \quad (13)$$

Величины $\Phi_{1,2}^\pm$, $\Psi_{1,2}^\pm$, $\chi_{1,2}^\pm$, T_*, Θ_* зависят от параметров оболочки и дифференциальных операторов, содержащихся в уравнении (1); их выражения приведены в работе [4]. Если эти величины разложить в ряд по степеням h и затем в этих разложениях отбросить члены порядка h^{2m+2} и выше, то из соотношений (13) получим на T и Θ два дифференциальных уравнения порядка $2m$. В частности, при удержании членов порядка до h^2 включительно получим

$$\left[p^2 + \frac{1}{2b^\pm} (p_c^2)^\pm\right] (\Theta \pm T) - \frac{3}{5} p^2 \Theta - \frac{1}{r} (1 \mp 2k_*) \Theta -$$
$$- \varepsilon_*^\pm \left[\left(1 \mp \frac{2}{3} k_*\right) \Theta \pm (T - t_c^\pm)\right] + W^\pm \pm Q_*^\pm = 0,$$
$$p^2 = h\left(\nabla^2 - c \frac{\partial}{\partial \tau}\right), \quad W^\pm = \frac{h}{4} \int\limits_{-1}^{1} w(z) (z^3 - 3z \pm 2) \, dz, \quad hz = \gamma. \quad (14)$$

Если в соотношениях (14) перейдем к пределу, устремив к нулю геометрические характеристики поперечных сечений подкрепляющих элементов, то получим уравнения теплопроводности гладких (не оребренных) оболочек. Для получения уравнений односторонне подкрепленных оболочек в соотношениях (14) следует положить равными нулю соответствующие величины, отмеченные только одним из индексов: «+» для случая внутреннего подкрепления и «—» — для внешнего.

3. Дискретно-континуальная модель. Для простоты выкладок будем предполагать, что положение i-го подкрепляющего элемента на поверхности оболочки определяется соотношением $\beta = \beta_i$. В этом случае условия теплообмена (3) и (10) с использованием ступенчатой функции $U(\beta)$ можно записать следующим образом:

$$\Big\{\lambda_\gamma \frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm \varepsilon_i^\pm (t - t_c^\pm) \mp \sum_{i=1}^{n} \frac{U(\beta-\beta_i^\pm+a_i^\pm) - U(\beta-\beta_i^\pm-a_i^\pm)}{2a_i^\pm}\, [(p_c^2)^\pm t -$$

$$- (E_{00}^\pm - 2a_i^\pm \varepsilon_i^\pm)(t - t_c^\pm)] - E_{00}^\pm t_c^\pm + B_{00}^\pm\Big\}_{\gamma=\pm h} = 0.$$

Переходя в этом выражении к пределу при $a_i^\pm \to 0$ и сохраняя неизменными теплофизические характеристики подкрепляющих стержней, получаем

$$\Big\{\lambda_\gamma \frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm [\varepsilon_i^\pm + \sum_{i=1}^{n} \delta(\beta-\beta_i^\pm)\,\varepsilon_i^\pm](t - t_c^\pm) \mp$$

$$\mp \sum_{i=1}^{n} \delta(\beta-\beta_i^\pm)\,[(p_c^2)^\pm t + Q_i^\pm]\Big\}_{\gamma=\pm h} = 0. \qquad (15)$$

Здесь $\delta(\beta)$ — дельта-функция Дирака;

$$\varepsilon_i^\pm = (E_{00}^\pm)_i - 2a_i^\pm \varepsilon_i^\pm; \quad Q_i^\pm = \iint_{(D)} (w_c^\pm)_i\, dF.$$

Используя найденное операторным методом решение уравнения (1) и условия (13), аналогично предыдущему получаем

$$\Big[p^2 + \sum_{i=1}^{n} \delta(\beta-\beta_i^\pm)(p_c^2)^\pm\Big](\Theta \pm T) - \frac{3}{5} p^2 \Theta - \frac{1}{r}(1 \mp 2k_*)\Theta -$$

$$- \Big[\varepsilon_i^\pm + \sum_{i=1}^{n} \delta(\beta-\beta_i^\pm)\,\varepsilon_i^\pm\Big]\Big[\Big(1 \mp \frac{2}{3}k_*\Big)\Theta \pm (T - t_c^\pm) +$$

$$+ W^\pm \pm \sum_{i=1}^{n} \delta(\beta-\beta_i^\pm)\, Q_i^\pm = 0. \qquad (16)$$

Краевые условия для уравнений (9), (14) и (16) формулируются, как и в работах [1, 5].

Отметим, что по известным решениям уравнений (14) и (16) с принятой при выводе этих уравнений точностью определяется температурное поле в любых точках оболочки, включая и поверхности $\gamma = \pm h$ [12]. Следовательно, если известны T и Θ, то известны и правые части уравнений (9). Значит, из этих уравнений при соответствующих краевых условиях могут быть определены все температурные характеристики подкрепляющего набора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Підстригач Я. С.* Температурне поле в тонких оболонках.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1958, № 5, с. 505—507.
2. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
3. *Підстригач Я. С., Іващук Д. В., Черниха Ю. А., Шевчук П. Р.* Рівняння дифузійних процесів у оболонках з покриттям.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 8, с 739—743.
4. *Підстригач Я. С., Черниха Ю. А.* Задача теплопровідності для опромінюваних оболонок.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 3, с. 263—267.
5. *Підстригач Я. С., Войтович М. І., Черниха Ю. А.* Умови теплообміну на підкріпленому краю оболонки.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 5, с. 429—433.
6. *Подстригач Я. С., Береговой С. Г., Черниха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности многослойных оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 105—110.

7. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя.— ИФЖ, 1963, 6, № 10, с. 129—136.
8. *Подстригач Я. С., Воробец Б. С., Чернуха Ю. А.* К термоупругой задаче для тел с включениями.— Прикл. механика, 1972, 8, № 12, с. 80—85.
9. *Подстригач Я. С., Караванский О. В.* К расчету температурных полей в тонкостенных ребристых элементах конструкций.— В кн.: Исследования по теплопроводности. Минск, 1967, с. 454—465.
10. *Подстригач Я. С., Войтович Н. И., Чернуха Ю. А.* Температурные поля криволинейных стержней и подкрепленных оболочек.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 15—20.
11. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Условия теплообмена на подкрепленном крае многослойной оболочки.— Мат. мет. и физ.-мех. поля, 1977, вып. 6, с. 7—9.
12. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций.— В кн.: Теория оболочек и пластин. Л., 1975, с. 82—85.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.IX 1976 г.

УДК 539.3

Б. Л. Пелех

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ

В последнее время возник интерес к контактным задачам для тонкостенных элементов (стержней, пластин, оболочек). Имеются в виду следующие классы задач: о взаимодействии упругих тонких элементов с твердыми жесткими телами (штампами, подкрепляющими бандажами, ребрами жесткости), о упругом контакте оболочек и пластин между собой, о сопряжении континуумов разных измерений (оболочка либо пластинка — массивное упругое тело). Такие задачи принято называть нетрадиционными в том смысле, что известные допущения Герца о малости области контакта в рамках трехмерной постановки проблемы здесь неприменимы [1, 11].

К указанным классам задач сводятся также задачи о напряженном состоянии тел с упругими покрытиями, наносящимися на поверхность деталей для увеличения долговечности и защиты их от коррозии. Фундаментальные результаты в этом направлении с учетом диффузионных процессов в системе тело — покрытие получены Я. С. Подстригачем и его учениками [9, 10].

В работах [2, 3, 7] установлено, что результат решения контактных задач рассматриваемых классов качественно зависит от выбора кинематических и статических моделей, описывающих состояние тонкостенных элементов. В частности, применение классических гипотез Кирхгофа — Лява приводит к результатам, противоречащим физической сущности задач [5, 6].

Обсудим возможности новых постановок и решений контактных задач указанных классов с учетом предположения о наличии в зонах контактирующих тел промежуточных поверхностных слоев *, свойства которых отличаются от свойств элементов, находящихся в упругом контакте, и покажем, что введение таких слоев в некотором случае эквивалентно обобщениям моделей состояния упругих элементов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим взаимодействие твердых жестких тел с упругими элементами, как свободными, так и связанными с массивными упругими телами (основаниями). Будем считать, что верхний слой упругого элемента, находящийся в контакте с твердым телом, обладает особыми

* В рамках трехмерной постановки впервые обобщение контактных задач на случай наличия слоев, отображающих деформации реальных микронеровностей поверхностей контактирующих тел, дано в работе [13].