незначительных пределах. Числовые подсчеты показали, что при $d = 4a$ для произвольных α, ψ и φ $|k_2| < 0{,}03k_\infty$, $|k_3| < 0{,}02k_\infty$.

Если трещины размещены в одной плоскости, то полученные по формулам (15) результаты совпадают с приведенными в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андрейкив А. А.* Решение задачи термоупругости для полупространства с круговыми линиями раздела краевых условий.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1972, вып. 12, с. 95—101.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
4. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.—ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
5. *Леонов М. Я.* Некоторые задачи и приложения теории потенциала.— ПММ, 1940, **4**, № 5-6, с. 73—86.
6. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К., «Наук. думка», 1968. 246 с.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974. 640 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.XI1976 г.

УДК 539.3

Т. Л. Мартынович

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Точное решение плоской задачи для анизотропной пластинки, ослабленной отверстием, известно только для случаев, когда отверстие имеет форму круга или эллипса [1, 2]. Для определения напряжений в анизотропной пластинке возле отверстия, мало отличающегося от кругового или эллиптического, применяются приближенные методы [1, 3, 4], которые распространены и на случай многосвязных анизотропных пластинок [5]. В данной статье приведено точное решение второй основной задачи для бесконечной анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, ограниченным простым замкнутым контуром.

Пусть анизотропная пластинка, имеющая в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости Oxy, занимает бесконечную область S с отверстием, ограниченным простым гладким замкнутым контуром $\mathscr{L}$. Рассмотрим вторую основную задачу, когда заданы смещения u и v точек границы $\mathscr{L}$ области S, а напряжения в пластинке на бесконечности ограничены: $\sigma_x^\infty = p$, $\sigma_y^\infty = q$, $\tau_{xy}^\infty = r$.

На основании формул плоской задачи анизотропной среды [1, 2] граничные условия записываем в дифференциальной форме

$$dV = d(u + iv) \qquad (t \in \mathscr{L}), \tag{1}$$

причем

$$V = \sum_{j=1}^{2} [(p_j + iq_j)\varphi_j(z_j) + (\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\overline{\varphi_j(z_j)}]; \tag{2}$$

$$\lim_{|z_j| \to \infty} \varphi_j'(z_j) = A^{(j)} \qquad (j = 1,\ 2).$$

Здесь $A^{(j)}$ — постоянные, которые выражаются через напряжения в пластинке на бесконечности; t — аффикс точки контура $\mathscr{L}$; $z_j = x + s_j y$ ($j =$

$= 1, 2)$ — обобщенные комплексные переменные, изменяющиеся в областях S_j, получаемых из области S соответствующими аффинными преобразованиями, а $s_j = d_j + i\beta_j$ — корни характеристического уравнения; p_j, q_j $(j = 1, 2)$ — известные постоянные величины, зависящие от упругих свойств материала пластинки [1, 2].

Контуры отверстий областей S_j переменных $z_j = x + s_j y$ обозначим через $\mathscr{L}_j$, а аффиксы их точек — через t_j $(j = 1, 2)$. Аффиксы точек контуров $\mathscr{L}_j$ и $\mathscr{L}$ находятся между собой в аффинном соответствии:

$$t_j = \frac{1 - is_j}{2} t + \frac{1 + is_j}{2} \bar{t} \qquad (j = 1, 2). \tag{3}$$

Граничные условия (1) преобразуем к интегральному виду [6]

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathscr{L}} F(t)\, dV &= \int\limits_{\mathscr{L}} F(t)\, d(u + iv), \\ \int\limits_{\mathscr{L}} \overline{F(t)}\, dV &= \int\limits_{\mathscr{L}} \overline{F(t)}\, d(u + iv), \end{aligned} \tag{4}$$

где $F(t)$ — граничное значение произвольной функции $F(z)$ переменной $z = x + iy$, голоморфной в области пластинки S.

Пусть регулярная функция, совершающая конформное отображение внешности единичной окружности γ $(|\zeta| \geqslant 1)$ на внешность контура $\mathscr{L}$ области S, имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{k=1}^{N} c_k \zeta^{-k}\right) (\omega'(\zeta) \neq 0, \quad |\zeta| \geqslant 1), \tag{5}$$

причем [7]

$$\sum_{k=1}^{N} k |c_k|^2 < 1.$$

Изменением постоянных R, c_k и N в соотношении (5) можно получить отверстия в форме круга, эллипса, овала, криволинейного треугольника, четырехугольника и др.

Соотношения (3) с учетом отображающей функции (5) принимают вид

$$t_j = \frac{R_j}{R} [\omega(\sigma) + m_j \overline{\omega(\sigma)}] \quad (t_j \in \mathscr{L}_j, \qquad \sigma \in \gamma), \tag{6}$$

где

$$R_j = \frac{R(1 - is_j)}{2}; \quad m_j = \frac{1 + is_j}{1 - is_j} \qquad (j = 1, 2). \tag{7}$$

Выражения (6) представляют собой граничные значения функций

$$z_j = \omega_j(\zeta_j) = \frac{R_j}{R}\left[\omega(\zeta_j) + m_j \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta_j}\right)\right] \qquad (z_j \in S_j, \quad |\zeta_j| \geqslant 1), \tag{8}$$

регулярных в областях $|\zeta_j| \geqslant 1$, кроме точек $\zeta_j = \infty$, где они имеют полюс порядка N. Функции $\omega_j(\zeta_j)$, $\omega_j'(\zeta_j)$ имеют нули, расположенные вне единичной окружности γ, число которых равно $N - 1$. Только при $c_k = 0$ (круговое отверстие) и $N = 1$ $(|c_1| < 1)$ (эллиптическое отверстие) $\omega_j(\zeta_j) \neq 0$ и $\omega_j'(\zeta_j) \neq 0$ вне γ.

При больших $|z_j|$ функции $\varphi_j(z_j)$ имеют вид [1, 2]

$$\varphi_j(z_j) = D^{(j)} \ln z_j + \mathscr{A}^{(j)} z_j + \mathscr{A}_0'^{(j)} + 0\left(\frac{1}{z_j}\right) \qquad (j = 1, 2). \tag{9}$$

Постоянные $D^{(j)}$ выражаются через компоненты главного вектора внешних усилий, вызвавших заданные перемещения u и v точек контура $\mathscr{L}$ области S, по известным формулам [2].

Вводя обозначения $\varphi_j[\omega_j(\zeta_j)] = \varphi_{*j}(\zeta_j)$, находим

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)} \qquad (j = 1, 2), \tag{10}$$

где

$$\omega_j'(\zeta_j) = \frac{R_j}{R}\left[\omega'(\zeta_j) - \frac{m_j}{\zeta_j^2}\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta_j}\right)\right]. \tag{11}$$

Функции $\varphi_{*j}(\zeta_j)$ ограничены в областях $1 \leqslant |\zeta_j| < \infty$, а в точках $\zeta_j = \infty$ имеют полюс порядка N. Последние утверждения вытекают из условий (2), налагаемых на функции $\varphi_j(z_j)$ на бесконечности:

$$\lim_{|z_j|\to\infty} \varphi_j'(z_j) = \lim_{|\zeta_j|\to\infty} \frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)} = \mathcal{A}^{(j)} \qquad (j = 1, 2) \tag{12}$$

и ограниченности выражения

$$u + iv = \sum_{j=1}^{2} [(p_j + iq_j)\varphi_{*j}(\zeta_j) + (\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\overline{\varphi_{*j}(\zeta_j)}] \qquad (1 \leqslant |\zeta_j| < \infty).$$

Следовательно, функции $\varphi_{*j}(\zeta_j)$, ограниченные в области $1 \leqslant |\zeta_j| < \infty$ при достаточно больших $|\zeta_j|$, можно представить в виде рядов (неограниченные слагаемые отброшены)

$$\varphi_{*j}(\zeta_j) = D^{(j)}\ln\zeta_j + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(j)}\zeta_j^k + \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{A}_k^{(j)}\zeta_j^{-k} \qquad (j = 1, 2). \tag{13}$$

Однозначные функции (10) не имеют других особых точек, кроме полюсов, совпадающих с нулями функции $\omega_j'(\zeta_j)$. Следовательно, они являются мероморфными функциями переменных ζ_j, а в рассматриваемом случае в силу представлений (5) и (13) — дробно-рациональными.

При надлежащем определении функций $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ логично достичь того, что функции (10) будут ограниченными вне единичной окружности γ. Для этого достаточно потребовать, чтобы нули функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ совпадали вне γ с нулями функции $\omega_j'(\zeta_j)$.

Таким образом, функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ должны удовлетворять условиям

$$\varphi_{*j}'(\zeta_j^{(\nu)}) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N-1) \quad (j = 1, 2), \tag{14}$$

где $\zeta_j^{(\nu)}$ — корни уравнения

$$\omega_j'(\zeta_j) = 0 \qquad (j = 1, 2) — \tag{15}$$

по модулю больше единицы ($|\zeta_j^{(\nu)}| > 1$). На основании выражений (5), (11) и (13) функции (10) принимают следующий вид:

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{D^{(j)} + \sum\limits_{k=1}^{N} k a_k^{(j)}\zeta_j^k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mathcal{A}_k^{(j)}\zeta_j^{-k}}{R_j\left[\left(\zeta_j - \sum\limits_{k=1}^{N} k c_k\zeta_j^{-k}\right) - m_j\bar{R}R^{-1}\left(\zeta_j^{-1} - \sum\limits_{k=1}^{N} k\bar{c}_k\zeta_j^k\right)\right]} \qquad (j = 1, 2). \tag{16}$$

Условия (12) и (14) с учетом разложений (13) записываются так:

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathcal{A}_k^{(j)}(\zeta_j^{(\nu)})^{-k} - \sum_{k=1}^{N-1} k a_k^{(j)}(\zeta_j^{(\nu)})^k = N a_N^{(j)}(\zeta_j^{(\nu)})^N + D^{(j)} - \sum_{k=N+1}^{\infty} k\mathcal{A}_k^{(j)}(\zeta_j^{(\nu)})^{-k}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, N-1) \qquad (j = 1, 2), \tag{17}$$

причем

$$a_N^{(j)} = R_j[m_j\bar{c}_N\bar{R}R^{-1} + \delta_{N1} + \delta_{N0}]\mathcal{A}^{(j)}. \tag{18}$$

Здесь $\zeta_j^{(\nu)}$ — корни уравнений

$$\zeta_j - \sum_{k=1}^{N} kc_k\zeta_j^{-k} - m_j\bar{R}R^{-1}\left(\zeta_j^{-1} - \sum_{k=1}^{N} k\bar{c}_k\zeta_j^{k}\right) = 0 — \tag{19}$$

по модулю больше единицы ($|\zeta_j^{(\nu)}| > 1$) ($j = 1, 2$).

В преобразованной области граничные условия (4) принимают вид

$$\begin{gathered}\int_\gamma F_*(\sigma)\,dV = \int_\gamma F_*(\sigma)\,d(u+iv),\\ \int_\gamma \overline{F_*(\sigma)}\,dV = \int_\gamma \overline{F_*(\sigma)}\,d(u+iv),\end{gathered} \tag{20}$$

где $F_*(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ — произвольная функция, голоморфная вне γ.

Граничное значение функции V на γ согласно формулам (2) и (13) определяется формулой

$$\begin{aligned}V = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N}[(p_j+iq_j)a_k^{(j)}\sigma^k + (\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\bar{a}_k^{(j)}\sigma^{-k}] +\\ + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}[(p_j+iq_j)\mathcal{A}_k^{(j)}\sigma^{-k} + (\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\bar{\mathcal{A}}_k^{(j)}\sigma^{k}].\end{aligned} \tag{21}$$

Произвольную функцию $F_*(\zeta)$ представим в виде ряда

$$F_*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\zeta^{-n}. \tag{22}$$

Внесем выражения (21), (22) в граничные условия (20) и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура γ. Полагая при этом все E_j, кроме E_n, равными нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций (13) вида

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2}[(p_j+iq_j)\mathcal{A}_n^{(j)} + (\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\bar{a}_n^{(j)}] = f_n^*,\\ \sum_{j=1}^{2}[(\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\bar{\mathcal{A}}_n^{(j)} + (p_j+iq_j)a_n^{(j)}] = g_n^*\\ (n = 1, 2, \ldots, \infty),\end{gathered} \tag{23}$$

причем $a_n^{(j)} = 0$ при $n > N$;

$$f_n^* = -\frac{1}{2\pi in}\int_{\gamma+}\sigma^n d(u+iv); \quad g_n^* = \frac{1}{2\pi in}\int_{\gamma+}\sigma^{-n}d(u+iv). \tag{24}$$

Если главный вектор внешних усилий, вызвавших заданные перемещения u и v точек контура $\mathcal{L}$, равный нулю, то в формулах (13), (16) и (17) постоянные $D^{(j)} = 0$.

Из системы (23) при $n > N$ находим

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_n^{(1)} = \frac{p_2 - iq_2}{2i(q_1p_2 - p_1q_2)}f_n^* - \frac{p_2+iq_2}{2i(q_1p_2 - p_1q_2)}\bar{g}_n^*,\\ \mathcal{A}_n^{(2)} = \frac{p_1+iq_1}{2i(q_1p_2 - p_1q_2)}\bar{g}_n^* - \frac{p_1 - iq_1}{2i(q_1p_2 - p_1q_2)}f_n^*\\ (n > N).\end{gathered} \tag{25}$$

Присоединив к системе (23) ($n = 1, 2, \ldots, N$) равенства (17), получим конечную систему линейных алгебраических уравнений порядка $4N - 2$ (N — наибольшая отрицательная степень в разложении отображающей функции (5)) для определения остальных коэффициентов разложения функций (13).

Когда в отверстие пластинки $\mathscr{L}$ впаяно абсолютно жесткое ядро, то $u + iv = i\varepsilon_0 t + u_0 + iv_0$, где ε_0 — угол поворота ядра, а величины (25) определяются формулами

$$f_n^* = R\varepsilon_0 c_n i, \quad g_n^* = R\varepsilon_0 \delta_{n1} i, \quad f_n^* = 0 \text{ при } n > N \qquad (26)$$
$$(n = 1, 2, \ldots, N),$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

Угол поворота ядра ε_0 определяется из условия равенства момента M_0, приложенного к ядру, моменту усилий, передающихся на пластинку со стороны ядра. Это условие, записанное в функциях $\varphi_j'(z_j)$, имеет вид

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathscr{L}_j} t_j \varphi_j'(t_j)\, dt_j = \mathrm{Re}\, i \int\limits_{\mathscr{L}} \bar{t}(X_n + iY_n)\, ds = -M_0. \qquad (27)$$

В преобразованной области условие (27) с учетом формул (8), (10) будет таким:

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\gamma} \omega_j(\sigma_j)\, \varphi_{*j}'(\sigma_j)\, d\sigma_j = -M_0. \qquad (28)$$

Отсюда находим зависимость между углом поворота ядра ε_0 и моментом M_0, приложенным к ядру:

$$4\pi \mathrm{Im} \left\{ \sum_{j=1}^{2} R_j \left[-\mathcal{A}_1^{(j)} + \sum_{n=1}^{N} n c_n a_n^{(j)} + m_j \bar{R} R^{-1} \left(a_1^{(j)} - \sum_{n=1}^{N} n \bar{c}_n \mathcal{A}_n^{(j)} \right) \right] \right\} = -M_0. \quad (29)$$

Положив в равенстве (29) $\varepsilon_0 = 0$, получим формулу для определения величины момента M_0, удерживающего ядро от поворота.

Рассмотрим растяжение ортотропной пластинки с квадратным отверстием, в которое впаяно абсолютно жесткое ядро (или кольцо). Оси координат x и y направим параллельно главным направлениям упругости. На бесконечности пластинка растягивается усилиями $\sigma_x^\infty = p$, $\sigma_y^\infty = q$ $(\tau_{xy}^\infty = 0)$. Ядро свободно от внешних усилий $(M_0 = 0)$.

В рассматриваемом случае $N = 3$, $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = \bar{c}_3$, $R = \bar{R}$, $D^{(j)} = 0$, $\varepsilon_0 = 0$, $f_n^* = 0$, $g_n^* = 0$, $s_j = i\beta_j$, а коэффициенты $\mathcal{A}_n^{(j)}$, $a_n^{(j)}$ — величины действительные, причем с четными индексами n равны нулю. При положительном c_3 вершины квадрата лежат на осях x и y, а при отрицательном c_3 стороны квадрата параллельны осям координат x и y.

Система алгебраических уравнений (17), (23) с учетом симметрии задачи относительно координатных осей x и y будет шестого порядка следующего вида:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{2} [(p_j + iq_j)\mathcal{A}_n^{(j)} + (\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\, a_n^{(j)}] = 0, \\ \sum_{j=1}^{2} [(\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\mathcal{A}_n^{(j)} + (p_j + iq_j)\, a_n^{(j)}] = 0, \end{gathered} \qquad (30)$$

$$3\mathcal{A}_3^{(j)} + \mathcal{A}_1^{(j)} (\zeta_j^{(\nu)})^2 - a_1^{(j)} (\zeta_j^{(\nu)})^4 = 3a_3^{(j)} (\zeta_j^{(\nu)})^6$$
$$(n = 1, 3) \quad (j = 1, 2) \quad (\nu = 1, 2),$$

где

$$a_3^{(1)} = -\frac{R_1 m_1 c_3}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}(p + \beta_2^2 q), \quad a_3^{(2)} = \frac{R_2 m_2 c_3}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}(p + \beta_1^2 q).$$

Здесь $\zeta_j^{(\nu)}$ — корни уравнений (19)

$$3c_3 m_j \zeta_j^6 + \zeta_j^4 - m_j \zeta_j^2 - 3c_3 = 0 \qquad (j = 1, 2) — \qquad (31)$$

по модулю больше единицы $(|\zeta_j^{(\nu)}| > 1)$.

Функции напряжений согласно формулам (16) имеют вид

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{3a_3^{(j)}\zeta_j^6 + a_1^{(j)}\zeta_j^4 - \mathcal{A}_1^{(j)}\zeta_j^2 - 3\mathcal{A}_3^{(j)}}{R_j[(\zeta_j^4 - 3c_3) - m_j(\zeta_j^2 - 3c_3\zeta_j^6)]} \qquad (j = 1, 2). \qquad (32)$$

В таблице помещены численные значения напряжений σ_θ и σ_ρ (в долях p) в некоторых точках контура квадратного отверстия $\left(c_3 = \mp \frac{1}{9}\right)$ вдоль линии спая с ядром фанерной пластинки с комплексными параметрами [1]: $s_1 = 4{,}11i$, $s_2 = 0{,}343i$, если $E_x = E_{\max}$, и $s_1 = 0{,}243i$, $s_2 = 2{,}91i$, если $E_x = E_{\min}$, $E_1 = 1{,}2 \cdot 10^5$ кг/см², $E_2 = 0{,}6 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu_1 = 0{,}072$, $\nu = 0{,}036$, $G = 0{,}07 \cdot 10^5$ кг/см².

$\sigma_x^\infty = p,\quad \sigma_y^\infty = 0,\quad \tau_{xy}^\infty = 0,\quad E_x = E_{\max}$

θ, рад	$c_3 = -\frac{1}{9}$		$c_3 = \frac{1}{9}$		θ, рад	$c_3 = -\frac{1}{9}$		$c_3 = \frac{1}{9}$	
	σ_θ	σ_ρ	σ_θ	σ_ρ		σ_θ	σ_ρ	σ_θ	σ_ρ
0	0,044	1,234	0,049	1,357	5π/18	1,069	0,503	0,436	0,540
π/36	0,044	1,238	0,100	1,267	π/3	0,883	0,117	0,434	0,503
π/18	0,045	1,249	0,232	1,078	7π/18	0,165	0,040	0,478	0,414
π/12	0,045	1,268	0,354	0,899	5π/12	0,046	0,034	0,522	0,332
π/9	0,045	1,294	0,427	0,768	4π/9	0,009	0,033	0,553	0,217
π/6	0,059	1,342	0,471	0,626	17π/36	0,003	0,033	0,423	0,095
2π/9	0,329	1,161	0,457	0,569	π/2	0,002	0,033	0,003	0,038

Корни уравнений (31) по модулю больше единицы ($|\zeta_j^{(\nu)}| > 1$) и соответственно равны:

$$(\zeta_1^{(\nu)})^2 = -4{,}324;\quad (\zeta_2^{(\nu)})^2 = 5{,}685,\ \text{если}\ E_x = E_{\max},\quad c_3 = -\frac{1}{9};$$

$$(\zeta_1^{(\nu)})^2 = 5{,}427;\quad (\zeta_2^{(\nu)})^2 = -6{,}559,\ \text{если}\ E_x = E_{\max},\quad c_3 = \frac{1}{9};$$

$$(\zeta_1^{(\nu)})^2 = 4{,}324;\quad (\zeta_2^{(\nu)})^2 = -5{,}685,\ \text{если}\ E_x = E_{\min},\quad c_2 = -\frac{1}{9};$$

$$(\zeta_1^{(\nu)})^2 = -5{,}427;\quad (\zeta_2^{(\nu)})^2 = 6{,}559,\ \text{если}\ E_x = E_{\min},\quad c_4 = \frac{1}{9}$$

$$(\nu = 1,\ 2).$$

Задача изгиба анизотропной пластинки с отверстием вида (5), в которое впаяно абсолютно жесткое ядро, решается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. К., «Наук. думка», 1968. 887 с.
3. *Шерман Д. И.* К решению плоской задачи теории упругости анизотропной среды.— ПММ, 1942, 6, № 6, с. 72—80.
4. *Космодемианский А. С.* Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластинке с криволинейным отверстием.— Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, 1965, вып. 2, с. 35—42.
5. *Космодемианский А. С.* О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя неодинаковыми отверстиями.— Изв. АН СССР. Механика, математика, 1961, № 1, с. 175—177.

6. *Мартынович Т. Л.* Об одном эффективном методе решения задач о напряженном состоянии в анизотропных пластинках с подкрепленным краем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2, с. 110—116.
7. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1954. 444 с.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию 20.VIII 1976 г.

УДК 539.3

В. А. Осадчук

НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С СИСТЕМОЙ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН

Напряженно-деформированное состояние замкнутой цилиндрической оболочки с одной или несколькими трещинами (разрезами) исследовалось на основании технической теории оболочек [3—5]. Пределы применимости полученных при этом результатов могут быть установлены с использованием более точных (общих) уравнений теории оболочек. В настоящей работе исследовано упругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с системой коллинеарных трещин, периодически расположенных вдоль окружности; в качестве исходных приняты уравнения общей моментной теории оболочек. С использованием метода дисторсий [5] задача о напряжениях в оболочке с трещинами сведена к решению сингулярных интегральных уравнений и получены формулы для определения коэффициентов интенсивности.

Рассмотрим отнесенную к ортогональной криволинейной системе координат (α, β, γ) бесконечную цилиндрическую оболочку с системой k трещин, периодически расположенных вдоль окружности $\alpha = 0$. Предположим, что эта оболочка находится под действием нагрузки, которая в идентичной оболочке без трещин вызывает осесимметричное напряженное состояние. В этом случае напряженно-деформированное состояние рассматриваемой оболочки с трещинами будет циклически симметричным, что позволяет в дальнейшем исследовать цилиндрическую панель $|\beta| \leqslant \frac{\pi}{k}$ с трещиной $\alpha = 0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$ $\left(\beta_0 < \frac{\pi}{k}\right)$.

Используя предложенный в работах [3, 5] метод решения задач теории оболочек с трещинами, исходные уравнения рассматриваемой задачи записываем так:

$$L_{i1}u + L_{i2}v + L_{i3}w = g_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Здесь

$$L_{11} = \partial_1^2 + \frac{1-\nu}{2}\partial_2^2; \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2; \quad L_{13} = L_{31} = \nu\partial_1;$$

$$L_{22} = \frac{1-\nu}{2}\partial_1^2 + \partial_2^2 + c_1^2[2(1-\nu)\partial_1^2 + \partial_2^2]; \quad L_{23} = L_{32} = \partial_2(1 - c_1^2 L);$$

$$L_{33} = 1 + c_1^2\nabla^2\nabla^2; \quad L = (2-\nu)\partial_1^2 + \partial_2^2; \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial\beta};$$

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2; \quad c_1^2 = \frac{h^2}{3R^2};$$

$$g_1 = R\partial_1\varepsilon_{11}^0; \quad g_2 = \nu R\partial_2\varepsilon_{11}^0 + \frac{h^2}{3}\nu\partial_2\varkappa_{11}^0;$$

$$g_3 = \nu R\varepsilon_{11}^0 - \frac{h^2}{3}(\partial_1^2 + \nu\partial_2^2)\varkappa_{11}^0;$$