УДК 539.377

Г. С. Кит, М. В. Хай, И. П. Лаушник

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ДИСКООБРАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Пусть в упругом бесконечном теле, связанном с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$, имеется N плоских трещин (разрезов) произвольной конфигурации, находящихся под действием касательных N_{1n}, N_{2n} и нормальных N_{3n} усилий ($n = \overline{1, N}$).

Обозначим через S_n область, которую занимает n-я трещина, а через S_n^+ и S_n^- — противоположные ее поверхности. При деформации эти поверхности смещаются относительно друг друга, вследствие чего компоненты вектора перемещений разрывны при переходе с поверхности S_n^+ на S_n^-. Поэтому при решении задачи будем имитировать трещины скачками смещений, которые характеризуются функциями $\alpha_{in}(P_n)$, где $P_n(x_{1n}, x_{2n}, 0)$ — точка области S_n в локальной системе координат $O_nx_{1n}x_{2n}x_{3n}$. Эта система выбрана так, что координатная плоскость $x_{1n}O_nx_{2n}$ совпадает с плоскостью расположения трещины.

Компоненты u_{in} вектора перемещений $\vec{U}_n$, согласно результатам работы [3], определим через неизвестный скачок смещений поверхностей n-й трещины по формулам

$$u_{in}(M_n) = \frac{\partial \Psi_{in}(M_n)}{\partial x_{3n}} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{\partial \Psi_{3n}(M_n)}{\partial x_{in}} - \frac{x_{3n}}{2(1-\nu)}\frac{\partial \Psi_n(M_n)}{\partial x_{in}} \qquad (i = 1, 2),$$

$$u_{3n}(M_n) = \frac{\partial \Psi_{3n}(M_n)}{\partial x_{3n}} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial \Psi_{1n}(M_n)}{\partial x_{1n}} + \frac{\partial \Psi_{2n}(M_n)}{\partial x_{2n}}\right] - \frac{x_{3n}}{2(1-\nu)}\frac{\partial \Psi_n(M_n)}{\partial x_{3n}}, \tag{1}$$

где ν — коэффициент Пуассона;

$$\Psi_n(M_n) = \sum_{s=1}^{3}\frac{\partial \Psi_{sn}(M_n)}{\partial x_{3n}}; \quad \Psi_{in}(M_n) = \iint\limits_{S_n}\frac{\alpha_{in}(P_n)\,dS_n}{R_n}; \tag{2}$$

$R_n = [(x_{1n}-\xi_1)^2 + (x_{2n}-\xi_2)^2 + x_{3n}^2]^{1/2}$ — расстояние между точками $M_n(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$ и P_n области S_n.

Если локальные системы координат выбраны так, что $S_n^{\pm}$ соответствует $x_{3n} = \pm 0$, то из формул (1) и (2) следует, что $\alpha_{in} = (u_{in}^- - u_{in}^+)/4\pi$ и равны нулю на контуре области S_n.

Учитывая формулы (1) и (2), для компонент тензора напряжений записываем выражения

$$\sigma_{i3n} = \frac{G}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2 \Psi_{in}}{\partial x_{3n}^2} - (-1)^i \nu \frac{\partial}{\partial x_{(3-i)n}}\left(\frac{\partial \Psi_{1n}}{\partial x_{2n}} - \frac{\partial \Psi_{2n}}{\partial x_{1n}}\right) - x_{3n}\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x_{in} x_{3n}}\right] \qquad (i = 1, 2),$$

$$\sigma_{33n} = \frac{G}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2 \Psi_{3n}}{\partial x_{3n}^2} - x_{3n}\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x_{3n}^2}\right],$$

$$\sigma_{12n} = \frac{G}{1-\nu}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial x_{1n}\partial x_{2n}}[(1-2\nu)\Psi_{3n} + x_{3n}\Psi_n] + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial x_{3n}}\left(\frac{\partial \Psi_{1n}}{\partial x_{2n}} + \frac{\partial \Psi_{2n}}{\partial x_{1n}}\right)\right\}, \tag{3}$$

$$\sigma_{iin} = \frac{G}{1-\nu}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial x_{in}^2}[(1-2\nu)\Psi_{3n} + x_{3n}\Psi_n] + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial}{\partial x_{3n}}\left[\nu\Psi_n + (1-\nu)\frac{\partial \Psi_{in}}{\partial x_{in}}\right]\right\} \qquad (i = 1,\ 2),$$

где G — модуль сдвига.

По известным σ_{ijn} можно определить внутренние усилия в теле на произвольной площадке с нормалью $\vec{n}$, обусловленные скачками смещений поверхностей всех трещин. В частности, если нормаль $\vec{n}$ совпадает с осью $O_n x_{3n}$, то суммарные усилия на поверхности S_n должны равняться заданным внешним усилиям на трещине. Удовлетворяя этому условию, для определения $\alpha_{in}(P_n)$ получаем интегральные уравнения

$$\Delta_n \iint_{S_n} \frac{\alpha_{in}(P_n)\, dS_n}{R_{0n}} + (-1)^i (1-\delta_{i3})\, \nu \frac{\partial}{\partial x_{(3-i)n}} \iint_{S_n} \left[\alpha_{1n}(P_n)\frac{\partial R_{0n}^{-1}}{\partial x_{2n}} - \right.$$

$$\left. - \alpha_{2n}(P_n)\frac{\partial R_{0n}^{-1}}{\partial x_{1n}}\right] dS_n - \sum_{k=1}^{N}{}' \iint_{S_k} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{sk}(P_k)\, \chi_{is}(P_k,\ M_n)\, dS_k =$$

$$= \frac{1-\nu}{G} N_{in}(M_n) \qquad (n = \overline{1,\ N}),\ (i = \overline{1,3}), \qquad M_n \in S_n. \tag{4}$$

Здесь N_{in} — заданная на n-й трещине нагрузка; δ_{ij} — символ Кронекера; штрих возле суммы означает, что в ней опущен член с номером $k = n$;

$$R_{0n} = |\overrightarrow{P_n M_n}|; \quad R_{kn} = |\overrightarrow{P_k M_n}|; \quad \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{2n}^2}; \tag{5}$$

$$\chi_{is}(P_k,\ M_n) = \hat{K}_{is}\left(\frac{1}{R_{kn}}\right) - x_3 \frac{\partial}{\partial x_s}\hat{L}_i\left(\frac{1}{R_{kn}}\right),$$

причем $\hat{K}_{is}$ и $\hat{L}_i$ — операторы

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_{is} \\ \hat{L}_i \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{3}\left[\begin{pmatrix} K_{pis} \\ l_{ip3} \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \begin{pmatrix} K_{pis}^{*} \\ l_{ip3}^{*} \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_{(p+1)}}\right],$$

в которых $x_4 \equiv x_1$, $x_p = e_{pkn} d_{kn} + \sum\limits_{j=1}^{3} l_{pj} x_{jn}$, e_{pkn} — направляющие косинусы вектора $\vec{d}_{kn}$, соединяющего точки O_k и O_n с осями $O_k x_{pk}$; $d_{kn} = |\vec{d}_{kn}|$; величины l_{ji} — косинусы углов между осями $O_n x_{in}$ и $O_k x_{jk}$ $(i,\ j = \overline{1,3})$. Коэффициенты K_{pis}, K_{pis}^{*}, l_{pi3} и l_{pi3}^{*} выражаются соотношениями

$$K_{1is} = \nu\delta_{2s} l_{2i3}^{*} - (1-2\nu)\,\delta_{3s} l_{1i3}, \quad K_{2is} = \nu\delta_{1s} l_{3i3}^{*} - (1-2\nu)\,\delta_{3s} l_{2i3},$$

$$K_{3is} = \delta_{1s} l_{3i3}^{*} + \delta_{2s} l_{2i3}^{*} + \delta_{3s}[2\nu(l_{1i3} + l_{2i3}) + l_{3i3}],$$

$$K_{1is}^{*} = -\nu(\delta_{1s} l_{2i3}^{*} + \delta_{2s} l_{3i3}^{*}) - (1-2\nu)\,\delta_{3s} l_{1i3}^{*},$$

$$K_{3is}^{*} = 2\delta_{1s}(l_{1i3} + \nu l_{2i3}) + (1-\nu)\,\delta_{2s} l_{1i3}^{*},$$

$$K_{2is}^{*} = 2\delta_{2s}(\nu l_{1i3} + l_{2i3}) + (1-\nu)\,\delta_{1s} l_{1i3}^{*},$$

$$l_{pi3} = l_{pi} l_{p3}, \quad l_{pi3}^{*} = l_{pi} l_{(p+1)3} + l_{(p+1)i} l_{p3}, \quad l_{4i} \equiv l_{1i}.$$

Решение интегральных уравнений (4) для произвольной области S_n является довольно сложной задачей. Однако для круговой области S_n (дискообразные трещины) можно построить приближенное решение уравнений (4) при некоторых ограничениях относительно расположения трещин. Для этого сведем интегральные уравнения (4) к решению двумерных интегральных уравнений типа Фредгольма.

Так как функции α_{in} равны нулю на контуре области S_n, то с результатов работы [4] можно положить

$$\alpha_{in}(M_n) = -\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{S_n} \varepsilon_{in}(P_n)\left[\frac{1}{|\overrightarrow{P_nM_n}|} + \iint\limits_{S_n^*} \frac{\mu_n(P_n, P_n^*)}{|\overrightarrow{P_n^*M_n}|} dS_n^*\right] dS_n, \qquad (6)$$

где $\varepsilon_{in}(P_n)$ — неизвестные функции;

$$\mu_n[P_n(\alpha, \beta), P_n^*(u, v)] = -\frac{\sqrt{(a_n^2 - \alpha^2 - \beta^2)(u^2 + v^2 - a_n^2)^{-1}}}{\pi^2[(\alpha - u)^2 + (\beta - v)^2]}, \qquad (7)$$

причем a_n — радиус круговой области S_n, $P_n \in S_n$; S_n^* — внешняя по отношению к S_n область, $P_n^* \in S_n^*$. Здесь и в дальнейшем предполагаем, что локальные системы координат выбраны в центрах дискообразных трещин.

Используя результаты работ [4, 5], из формулы (6) получаем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_{jn}}\iint\limits_{S_n} \frac{\alpha_{in}(\xi_1, \xi_2)}{R_{0n}} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_{in}(\xi_1, \xi_2)(x_{jn} - \delta_{j1}\xi_1 - \delta_{j2}\xi_2)}{(x_{1n} - \xi_1)^2 + (x_{2n} - \xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2, \qquad (8)$$

$$\Delta_n \iint\limits_{S_n} \frac{\alpha_{in}(P_n)}{R_{0n}} dS_n = \varepsilon_{in}(M_n), \quad M_n \in S_n,$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{in}(P_n) &= \varepsilon_{in}(P_n) \text{ для } P_n \in S_n; \\ \beta_{in}(P_n) &= \iint\limits_{S_n} \varepsilon_{in}(P_n^*)\,\mu_n(P_n^*, P_n)\, dS_n^* \text{ для } P_n \in S_n^*. \end{aligned} \qquad (9)$$

Если вместо функций $\alpha_{in}(P_n)$ ввести в рассмотрение функции $\varepsilon_{in}(P_n)$ по формулам (6), то интегральные уравнения (4) сведутся к интегральным уравнениям типа Фредгольма для определения $\varepsilon_{in}(P_n)$, а именно:

$$\varepsilon_{in}(M_n) + \frac{(-1)^i(1 - \delta_{i3})}{2} \nu \frac{\partial W_n(M_n)}{\partial x_{(3-i)n}} - \sum_{k=1}^{N}{}' \iint\limits_{S_k} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{sk}(P_k)\chi_{is}(P_k, M_n)\, dS_k =$$

$$= \frac{1 - \nu}{G} N_{in}(M_n) \qquad (n = \overline{1, N}), \quad M_n \in S_n, \qquad (10)$$

$$W_n(M_n) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x_{2n} - \xi_2)\beta_{1n}(\xi_1, \xi_2) - (x_{1n} - \xi_1)\beta_{2n}(\xi_1, \xi_2)}{(x_{1n} - \xi_1)^2 + (x_{2n} - \xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2, \qquad (11)$$

причем α_{in} и β_{in} выражаются через ε_{in} соответственно по формулам (6), (9).

Построим приближенное решение системы интегральных уравнений (10). Обозначим через d_n величину $\min d_{kn}$ и предположим, что $d_n > 2a_n$, $d_n > 2a_k$, где a_k — радиусы трещин, соседних с n-й трещиной. Тогда ядра интегральных уравнений (10) разлагаются в сходящиеся ряды

$$\chi_{is}(P_k, M_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\chi_{is}^{(p)}(P_k, M_n)}{d_n^{p+3}}.$$

Если представить функции ε_{in} в виде ряда

$$\varepsilon_{in}(M_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{inp}(M_n)}{d_n^p},$$

то из уравнений (10) для определения ε_{inp} получим системы интегральных уравнений в виде

$$\varepsilon_{inr}(M_n) + \frac{(-1)^i (1-\delta_{i3})\nu}{2} \frac{\partial W_{nr}(M_n)}{\partial x_{(3-i)n}} = \delta_{r0} \frac{1-\nu}{G} N_{in}(M_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N}{}' \sum_{p=0}^{r-3} \iint_{S_k} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{skp}(P_k) \chi_{is}^{(r-3-p)}(P_k, M_n) \, dS_k. \qquad (12)$$

В формулах (12) α_{skp} определяются через ε_{skp} соотношениями (6), а соответствующие величины следует принять равными нулю, если хотя бы один из индексов отрицательный. Функции W_{nr} определяются через ε_{inr} по формулам (11), если в последних заменить ε_{in} на ε_{inr}.

Так как функции $\chi_{is}^{(p)}$ есть многочлены p-й степени переменных x_{1n}, x_{2n}, то можно убедиться в том, что функции ε_{inr} необходимо искать в виде многочленов степени $r-3$ с неизвестными коэффициентами, которые определяются из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Это непосредственно следует из выражений (11), если при вычислении интегралов воспользоваться результатами работ [2, 6].

Располагая функциями ε_{in}, можно непосредственно определить коэффициенты интенсивности напряжений k_{in} [7]. Учитывая выражения компонент напряжений через функции α_{in}, а также формулы (6) и (7), получаем

$$k_{in}(\varphi_n, a_n) = \frac{G}{(1-\nu)\pi\sqrt{a_n \pi}} \iint_{S_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}\, f_{in}(\xi_1, \xi_2, \varphi_n, a_n)}{(\xi_1 - a_n\cos\varphi_n)^2 + (\xi_2 - a_n \sin\varphi_n)^2} d\xi_1 d\xi_2 -$$

$$- \frac{\delta_{i3}(-1)^i G\nu}{2(1-\nu)} K_n(\varphi_n, a_n) \qquad (i = \overline{1,3}), \qquad (13)$$

где φ_n — угловая координата точек контура n-й трещины;

$$K_n(\varphi_n, a_n) = \lim_{r_n \to a_n} \sqrt{\frac{\pi(r_n^2 - a_n^2)}{a_n}} \frac{\partial}{\partial r_n} \iint_{S_n} \frac{\mu_n(r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n, \xi_1, \xi_2)}{W_n^{-1}(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2; \qquad (14)$$

$f_{1n} = \varepsilon_{3n}$; $f_{2n} = \varepsilon_{1n}\cos\varphi_n + \varepsilon_{2n}\sin\varphi_n$; $f_{3n} = -\varepsilon_{1n}\sin\varphi_n + \varepsilon_{2n}\cos\varphi_n$;

μ_n — функция, определяемая формулой (7), а W_n — соотношениями (11) и (9).

Если трещины находятся под действием постоянного внутреннего давления N_n и их центры размещены вдоль прямой линии, то выражения для коэффициентов интенсивности напряжений можно записать в виде ряда

$$k_{1n}(\varphi_n) = k_n \left\{1 - \frac{2}{3\pi} \sum_{k=1}^{N}{}' \varepsilon_n^3 \nu_{kn}^3 \left[F_{33} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{3} \frac{d_n}{d_{kn}} (\Omega_{333}\cos\varphi_n + \Omega_{433}\sin\varphi_n)\varepsilon_n\right]\right\} + O(\varepsilon_n^5),$$

$$k_{2n}(\varphi_n) = -\frac{4k_n}{3\pi(2-\nu)} \sum_{k=1}^{N}{}' \varepsilon_n^3 \nu_{kn}^3 \{F_{13}\cos\varphi_n + F_{23}\sin\varphi_n +$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{d_n}{d_{kn}} [2(\Omega_{413} + \Omega_{323})\sin 2\varphi_n + \Omega_{313}(4\cos^2\varphi_n - \nu) +$$

$$+ \Omega_{423}(4\sin^2\varphi_n - \nu)]\varepsilon_n\} + O(\varepsilon_n^5), \qquad (15)$$

$$k_{3n}(\varphi_n) = \frac{4(1-\nu)k_n}{3\pi(2-\nu)} \sum_{k=1}^{N}{}' \varepsilon_n^3 \nu_{kn}^3 \{F_{13}\sin\varphi_n - F_{23}\cos\varphi_n +$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{d_n}{d_{kn}} [2(\Omega_{313} - \Omega_{423})\sin 2\varphi_n + (\Omega_{413} - \Omega_{323})\frac{\nu}{1-\nu} +$$

$$+ 4\Omega_{413}\sin^2\varphi_n - 4\Omega_{323}\cos^2\varphi_n]\varepsilon_n\} + O(\varepsilon_n^5),$$

где

$$k_n = 2N_n \sqrt{a_n/\pi}\,; \quad \varepsilon_n = a_n/d_n; \quad d_n = \min d_{kn},$$

$$\nu_{kn} = a_n d_n N_k / a_k d_{kn} N_n;$$

$$F_{js} = P_{js} + P^*_{js} - e_{3kn}(T_{js} + T^*_{js}) \qquad (j,\ s = \overline{1,\ 3});$$

$$\Omega_{ijs} = -[3P_{js} + 5P^*_{js} - e_{3kn}(7T_{js} + 5T^*_{js})]\, b_{(i-2)} +$$

$$+ 3S_{ijs} + e_{3kn}(15S^*_{ijs} - Q_{ijs}) - (T_{js} + T^*_{js})\, l_{3(i-2)};$$

$$b_j = l_{2j}e_{2kn} + l_{3j}e_{3kn}; \quad P_{js} = -\sum_{q=1}^{3} K_{qjs};$$

$$P^*_{js} = 3\sum_{q=2}^{3} e^2_{qkn}K_{qjs} + e_{2kn}e_{3kn}K^*_{2js};$$

$$T_{js} = -15e_{skn}\left(\sum_{q=2}^{3} e^2_{qkn}l_{qj3} + e_{2kn}e_{3kn}l^*_{2j3}\right);$$

$$T^*_{js} = 3e_{skn}\sum_{q=2}^{3}(1 + 2\delta_{qs})\, l_{qj3} + 3\,[(1 - \delta_{3s})\, l^*_{1j3}e_{(3-s)kn} +$$

$$+ (1 - \delta_{2s})\, l^*_{3j3}e_{(4-s)kn} + (1 - \delta_{1s})\, l^*_{2j3}e_{(5-s)kn}];$$

$$S_{ijs} = e_{2kn}\,[K^*_{1js}l_{1(i-2)} + 2K_{2js}l_{2(i-2)}] + 2e_{3kn}K_{3js}l_{3(i-2)} +$$

$$+ [e_{2kn}l_{3(i-2)} + e_{3kn}l_{2(i-2)}]\, K^*_{2js};$$

$$S^*_{ijs} = \sum_{q=2}^{3} e_{qkn}l_{qj3}\,[e_{qkn}(\delta_{1s}l_{1(i-2)} + 3\delta_{qs}l_{q(i-2)}) + (2e_{(5-q)kn}l_{q(i-2)} +$$

$$+ e_{qkn}l_{(5-q)(i-2)})\,\delta_{(5-q)s}] + (e_{2kn}\delta_{2s} + e_{3kn}\delta_{3s})(e_{2kn}l^*_{1j3} + e_{3kn}l^*_{3j3})\, l_{1(i-2)} +$$

$$+ l^*_{2j3}\,[e_{2kn}e_{3kn}(\delta_{1s}l_{1(i-2)} + 2\delta_{2s}l_{2(i-2)} + 2\delta_{3s}l_{3(i-2)}) +$$

$$+ e^2_{2kn}\delta_{2s}l_{3(i-2)} + e^2_{3kn}\delta_{3s}l_{2(i-2)})];$$

$$Q_{ijs} = 3\sum_{q=1}^{3}\delta_{qs}l_{q(i-2)}\,[(1 + 2\delta_{2s})\, l_{2j3} + (1 + 2\delta_{3s})\, l_{3j3}] +$$

$$+ 3l^*_{1j3}(\delta_{1s}l_{2(i-2)} + \delta_{2s}l_{1(i-2)}) + 3l^*_{3j3}(\delta_{1s}l_{3(i-2)} +$$

$$+ \delta_{3s}l_{1(i-2)}) + 3l^*_{2j3}(\delta_{2s}l_{3(i-2)} + \delta_{3s}l_{2(i-2)}).$$

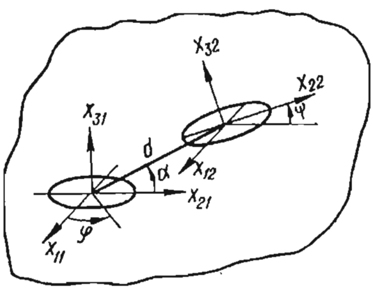

Рис. 1

Если центры дискообразных трещин не размещены на одной линии, то коэффициенты интенсивности напряжений определяются по формулам (15), но выражения для F_{ji} и Ω_{ijs} имеют более громоздкий вид.

В качестве примера рассмотрим две дискообразные трещины одинакового радиуса a, которые нагружены внутренним давлением p. Зададим параметры, характеризующие расположение трещин в пространстве, в виде $l_{12} = l_{13} = l_{21} = l_{31} = e_{1kn} = 0$, $l_{11} = 1$, $l_{22} = l_{33} = \cos\psi$, $l_{23} = -l_{32} = \sin\psi$, $e_{212} = \cos\alpha$, $e_{312} = \sin\alpha$, $e_{221} = -\cos(\alpha - \psi)$, $e_{321} = -\sin(\alpha - \psi)$. Это соответствует случаю, когда первая трещина неподвижна, а вторая произвольно смещается относительно первой (рис. 1). Угол ψ характеризует поворот второй трещины относительно своей оси O_2x_{12}, а величины α и d — смещение центра второй трещины относительно первой.

На рис. 2—7 приведены графики зависимостей коэффициентов интенсивности напряжений $\tilde{k}_i = k_i/k_\infty$ $(k_\infty = 2p\sqrt{a/\pi})$ от угловой координаты φ, вычисленные по формулам (15), причем рис. 2, 4, 6 относятся к неподвижной, а рис. 3, 5, 7 — к подвижной трещинам. При вычислениях положено $\nu = 0{,}3$; $d = 4a$ $(\varepsilon_n = 1/4)$. Сплошные кривые на всех рисунках соответствуют значениям $\alpha = \frac{\pi}{2}$, штриховые — $\alpha = \frac{\pi}{3}$, штрихпунктирные — $\alpha = 0$. Цифрами *1—4* обозначены графики, построенные соответственно при значениях $\psi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Звездочка возле цифр означает, что соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений имеют знак, противоположный указанному на рисунках.

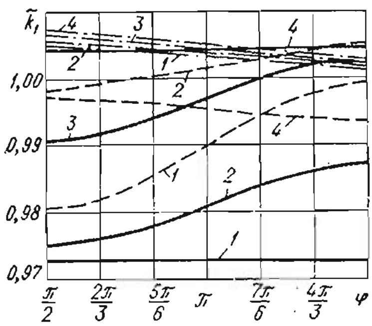

Рис. 2

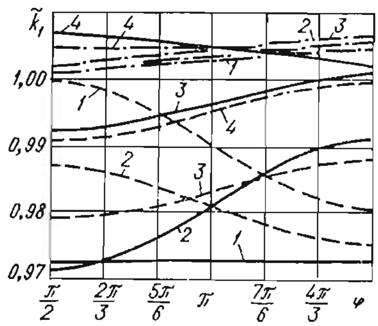

Рис. 3

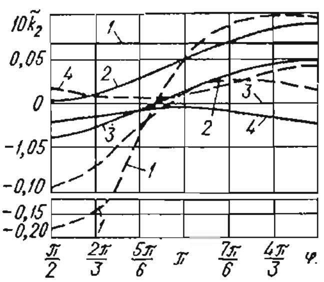

Рис. 4

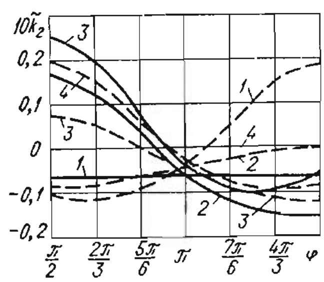

Рис. 5

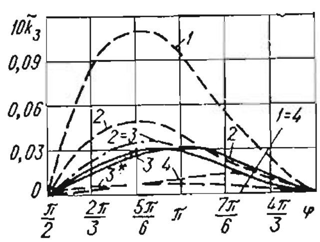

Рис. 6

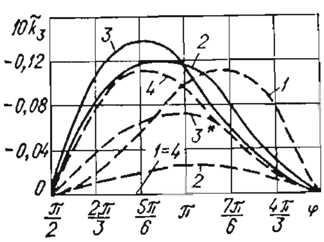

Рис. 7

Из графиков следует, что для соосных параллельных трещин коэффициент k_1 меньше, чем в случае одной трещины. Для неподвижной трещины значения k_1 при произвольном смещении второй трещины всегда больше, чем в случае параллельных соосных трещин. Изменение k_1 вдоль контура трещин существенно зависит от углов α и ψ. Для обеих трещин при $\alpha = 0$ и произвольном ψ изменение k_1 вдоль контура незначительно, причем его величина больше, чем в случае одной трещины. Коэффициенты интенсивности напряжений k_2 и k_3 являются соизмеримыми величинами и изменяются в незначительных пределах. Числовые подсчеты показали, что при $d = 4a$ для произвольных α, ψ и φ $|k_2| < 0{,}03k_\infty$, $|k_3| < 0{,}02k_\infty$.

Если трещины размещены в одной плоскости, то полученные по формулам (15) результаты совпадают с приведенными в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андрейкив А. А.* Решение задачи термоупругости для полупространства с круговыми линиями раздела краевых условий.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1972, вып. 12, с. 95—101.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
4. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.—ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
5. *Леонов М. Я.* Некоторые задачи и приложения теории потенциала.— ПММ, 1940, **4**, № 5-6, с. 73—86.
6. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К., «Наук. думка», 1968. 246 с.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974. 640 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.XI1976 г.

УДК 539.3

Т. Л. Мартынович

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Точное решение плоской задачи для анизотропной пластинки, ослабленной отверстием, известно только для случаев, когда отверстие имеет форму круга или эллипса [1, 2]. Для определения напряжений в анизотропной пластинке возле отверстия, мало отличающегося от кругового или эллиптического, применяются приближенные методы [1, 3, 4], которые распространены и на случай многосвязных анизотропных пластинок [5]. В данной статье приведено точное решение второй основной задачи для бесконечной анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, ограниченным простым замкнутым контуром.

Пусть анизотропная пластинка, имеющая в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости Oxy, занимает бесконечную область S с отверстием, ограниченным простым гладким замкнутым контуром $\mathcal{L}$. Рассмотрим вторую основную задачу, когда заданы смещения u и v точек границы $\mathcal{L}$ области S, а напряжения в пластинке на бесконечности ограничены: $\sigma_x^\infty = p$, $\sigma_y^\infty = q$, $\tau_{xy}^\infty = r$.

На основании формул плоской задачи анизотропной среды [1, 2] граничные условия записываем в дифференциальной форме

$$dV = d(u + iv) \qquad (t \in \mathcal{L}), \tag{1}$$

причем

$$V = \sum_{j=1}^{2} [(p_j + iq_j)\varphi_j(z_j) + (\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\overline{\varphi_j(z_j)}]; \tag{2}$$

$$\lim_{|z_j|\to\infty} \varphi_j'(z_j) = A^{(j)} \qquad (j = 1,\ 2).$$

Здесь $A^{(j)}$ — постоянные, которые выражаются через напряжения в пластинке на бесконечности; t — аффикс точки контура $\mathcal{L}$; $z_j = x + s_j y$ ($j =$