Лемма 3. *Матрицы* $\tilde{A}_0^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *симметризуемы слева положительно определенной матрицей*

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_0 \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать регулярный пучок матриц $\tilde{L}(\lambda) = \tilde{A}_2 - \lambda\tilde{S}$, $\tilde{A}_2 = \tilde{S}\tilde{A}_0^2$, собственные значения которого совпадают с квадратами собственных частот системы (1), и соответствующий ему функционал

$$p(\tilde{x}) = \frac{(\tilde{A}_2\tilde{x}, \tilde{x})}{(\tilde{S}\tilde{x}, \tilde{x})}, \quad \tilde{x} = \{x_1, x_2\} \in R^{2n} \oplus R^{2n}.$$

Покажем, что функционал $p(\tilde{x})$ монотонно зависит от матрицы кинетической энергии. Пусть $\hat{A} \geqslant A$ в том смысле, что $(\hat{A}y, y) \geqslant (Ay, y)\ \forall\, y \in R^n$. Тогда

$$p(\tilde{x}) = \frac{\| \mathcal{A}_0^{-1/2}(\mathcal{A}_2x_1 - \mathcal{A}_1x_2)\|^2 + (\mathcal{A}_2x_2, x_2)}{(\mathcal{A}_0x_2, x_2) + (\mathcal{A}_2x_1, x_1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\| \hat{\mathcal{A}}_0^{-1/2}(\mathcal{A}_2x_1 - \mathcal{A}_1x_2)\|^2 + (\mathcal{A}_2x_2, x_2)}{(\hat{\mathcal{A}}_0x_2, x_2) + (\mathcal{A}_2x_1, x_1)} = \hat{p}(\tilde{x}).$$

Монотонную зависимость от матрицы потенциальной энергии проще установить, если исходить из матричного пучка $\mu^2C + \mu iG - A$. На основании теоремы 15 [3, с. 292] получаем результат, который имеет следующую механическую интерпретацию.

Теорема. *При увеличении жесткости системы* (1.1), *т. е. при увеличении формы* (Cq, q) *для потенциальной энергии (без изменения* A *и* G), *частоты могут только увеличиться, а при увеличении инерции системы* (1.1), *т. е. при увеличении формы* (Aq, q) *для кинетической энергии (без изменения* G *и* C) *частоты могут только уменьшиться.*

Этот результат можно перенести на системы с бесконечным числом степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения. Канд. дис. Львов, 1972. 113 с.
2. *Балінський А. І., Зорій Л. М.* Про один спосіб дослідження спектра поліноміальних пучків самоспряжених операторів у гільбертовому просторі.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 6, с. 485—488.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967. 575 с.
4. *Lancaster* P. Lambda-matrices and vibrating systems. Oxford, Pergamon Press, 1966. 168p.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.X 1976 г.

УДК 539.377

Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ УТОЧНЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Для решения задач, связанных с расчетом оболочечных элементов конструкций, используется теория, основанная на предположении о сохранении нормального элемента. Во многих случаях применение классической теории приводит к удовлетворительным результатам. Однако для оболочек, обладающих значительной анизотропией и неоднородностью механических и теплофизических свойств, предположения классической теории требуют уточнения, так как те факторы, которыми пренебрегают в классической теории, могут играть существенную роль в определении напряженно-деформированного состояния. Решение задач для указанных оболочек в трехмерной постановке наталкивается на большие трудности, особенно при переменности геометрических и механических параметров. Поэтому для определения напряженного состояния слоистых анизотропных оболочек используются модели, дающие возможность переходить от трехмерной задачи к двумерной на основе предположений, менее жестких, чем допущения классической теории. Теория однородных и слоистых оболочек и пластин развивалась в ряде работ [1, 2, 4, 6—10]. Температурные задачи теории оболочек в уточненной постановке исследовались в работе [8]. Отметим, что в основном рассматривались оболочки постоянной толщины. В настоящей работе изложим некоторые подходы к построению уточненных теорий слоистых анизотропных оболочек переменной толщины.

Оболочку отнесем к ортогональной системе координат α, β, γ, где $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$ — линии главных кривизн на координатной поверхности $\gamma = 0$. Рассмотрим варианты теории оболочек, основанные на следующих допущениях.

1. Предположим справедливость гипотезы прямой линии для всего пакета оболочки в целом и примем, что относительная деформация по толщине i-го слоя $(\gamma_{i-1} \leqslant \gamma \leqslant \gamma_i = 1, 2, \ldots, N)$ $e_\gamma^i = \alpha_3^i T$, где T — температура, α_3^i — коэффициент линейного температурного расширения. В соответствии с этим для перемещений i-го слоя получаем

$$u_\alpha^i = u + \gamma\psi_\alpha, \quad u_\beta^i = v + \gamma\psi_\beta, \quad u_\gamma^i = w + w_T^i, \tag{1}$$

где u, v, w — перемещения координатной поверхности $\gamma = 0$; ψ_α, ψ_β — углы поворота; w_T^i — прогиб, обусловленный температурным удлинением нормали. Отметим, что при таких допущениях ψ_α, ψ_β в явном виде не зависят от упругих свойств и одинаковы для всех слоев.

Соотношения упругости в случае ортотропии материала каждого слоя имеют вид

$$\begin{gathered}
N_\alpha = C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\beta + K_{11}\varkappa_\alpha + K_{12}\varkappa_\beta - N_{\alpha T},\\
M_\alpha = K_{11}\varepsilon_\alpha + K_{12}\varepsilon_\beta + D_{11}\varkappa_\alpha + D_{12}\varkappa_\beta - M_{\alpha T},\\
N_{\alpha\beta} = C_{66}\varepsilon_{\alpha\beta} + 2K_{66}\varkappa_{\alpha\beta} + k_\alpha (K_{66}\varepsilon_{\alpha\beta} + 2D_{66}\varkappa_{\alpha\beta}),\\
M_{\alpha\beta} = K_{66}\varepsilon_{\alpha\beta} + 2D_{66}\varkappa_{\alpha\beta},\\
Q_\alpha = K_1\gamma_\alpha \qquad (1 \leftrightarrow 2, \ \alpha \leftrightarrow \beta).
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь N_α, $N_{\alpha\beta}$ — тангенциальные, Q_α — перерезывающее усилия; M_α, $M_{\alpha\beta}$ — изгибающий и крутящий моменты; C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}, K_1, K_2 — жесткостные характеристики [1, 7]; K_α, K_β — главные кривизны; $N_{\alpha T}$, $M_{\alpha T}$ — интегральные характеристики. Для деформаций ε_α, ε_β, $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\beta$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ имеем известные выражения [3, 7], а для γ_α, γ_β — осредненные по толщине величины поперечных сдвигов:

$$\gamma_\alpha = \psi_\alpha + \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_\alpha u + \frac{1}{A(\gamma_N - \gamma_0)}\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j}\frac{\partial w_T^j}{\partial \alpha}\,d\gamma \tag{3}$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta, \quad A \leftrightarrow B)$$

(A, B — параметры Ляме).

Рассматривая класс задач о несимметричной деформации оболочек вращения, из исходных уравнений после некоторых преобразований получаем систему

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \overline{N}}{\partial s} = B_0\overline{N} + B_1\frac{\partial \overline{N}}{\partial \theta} + B_2\frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial \theta^2} + \bar{f},\\
\overline{N} = \{N_x, N_z, N_{s\theta}, M_s, M_{s\theta}, u_x, u_z, v, \psi_s, \psi_\theta\}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь s — длина дуги меридиана; θ — центральный угол в параллельном круге; N_x, N_z — радиальное и осевое усилия; u_x, u_z — соответствующие перемещения; B_0, B_1, B_2 — матрицы, элементы которых есть функции геометрических и механических параметров; $\bar{f}$ — вектор, компоненты которого зависят от силовых и температурных воздействий. Представляя решение в виде рядов Фурье по окружной координате θ и разделяя переменные в системе (4), приходим к одномерной краевой задаче для системы уравнений десятого порядка, которая решается устойчивым численным методом.

2. Приведенный вариант теории слоистых оболочек, основанный на гипотезе прямой линии для всего пакета оболочки в целом, не дает возможности учитывать неоднородность деформаций поперечного сдвига, обусловленную различием упругих свойств материалов слоев.

Рассмотрим подход, в основу которого положены предположения о наличии в слоях оболочки локальных углов поворота, вызванных поперечным сдвигом, и удовлетворении на поверхности контакта смежных слоев условиям непрерывности перемещений и напряжений. Это позволяет выразить перемещения и углы поворота всех слоев через соответствующие величины одного из них и получить систему, порядок которой не зависит от числа слоев.

Исходя из этих предположений, получаем следующее распределение перемещений:

$$\begin{aligned} u_\alpha^i &= u + a_i\gamma_\alpha^{(0)} + \gamma(\psi_\alpha + b_i\gamma_\alpha^{(0)}), \\ u_\beta^i &= v + c_i\gamma_\beta^{(0)} + \gamma(\psi_\beta + d_i\gamma_\beta^{(0)}), \\ u_\gamma^i &= w + w_T^i, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\gamma_\alpha^{(0)}$, $\gamma_\beta^{(0)}$ — углы поворота, вызванные поперечным сдвигом в слое, внутри которого проходит координатная поверхность; величины a_i, b_i, c_i, d_i зависят от упругих свойств и толщин слоев и определяются из условий непрерывности перемещений и касательных напряжений на поверхностях контакта смежных слоев.

Соотношения упругости для рассматриваемого варианта теории оболочек имеют вид

$$\bar{N} = C\bar{\varepsilon} + D\bar{\varkappa} + E\bar{\eta} - \bar{N}_T, \quad Q_\alpha = K_1\gamma_\alpha^{(0)}, \quad Q_\beta = K_2\gamma_\beta^{(0)}, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \{N_\alpha,\ N_\beta,\ N_{\alpha\beta},\ N_{\beta\alpha},\ M_\alpha,\ M_\beta,\ M_{\alpha\beta},\ M_{\beta\alpha}\}, \\ \bar{\varepsilon} &= \{\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\beta,\ \varepsilon_{\alpha\beta}\}, \quad \bar{\varkappa} = \{\varkappa_\alpha,\ \varkappa_\beta,\ \varkappa_{\alpha\beta}\}, \\ \bar{\eta} &= \left\{\frac{\partial\gamma_\alpha^{(0)}}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\gamma_\alpha^{(0)}}{\partial\beta},\ \gamma_\alpha^{(0)},\ \frac{\partial\gamma_\beta^{(0)}}{\partial\beta},\ \frac{\partial\gamma_\beta^{(0)}}{\partial\beta},\ \gamma_\beta^{(0)}\right\}, \\ \bar{N}_T &= \{N_{\alpha T},\ N_{\beta T},\ 0,\ 0,\ M_{\alpha T},\ M_{\beta T},\ 0,\ 0\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь C, D, E — матрицы соответствующих размеров, элементы которых являются функциями геометрических и механических параметров оболочки.

Для оболочек вращения с использованием закона (5) распределения перемещений по толщине для определения компонент векторов $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varkappa}$, соотношения (7) и уравнения равновесия можно получить систему, аналогичную разрешающим уравнениям для оболочек на основе гипотезы прямой линии для всего пакета в целом.

3. Рассмотрим вариант теории оболочек, основанный на следующих предположениях:

1) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ изменяются по толщине i-го слоя по заданному закону

$$\tau_{\alpha\gamma}^{i} = f_{1i}(\alpha, \beta, \gamma)\,\varphi(\alpha, \beta) + \frac{1}{\delta_3^{i}} f_{1i}^{+}(\alpha, \beta, \gamma)\,[-\sigma_\alpha^{i}(\alpha, \beta, \gamma_i)\,\delta_1^{i} -$$
$$- \tau_{\alpha\beta}^{i}(\alpha, \beta, \gamma_i)\,\delta_2^{i}] + \frac{1}{\delta_3^{i-1}} f_{1i}^{-}(\alpha, \beta, \gamma)\,[-\sigma_\alpha^{i}(\alpha, \beta, \gamma_{i-1})\,\delta_1^{i-1} -$$
$$- \tau_{\alpha\beta}^{i}(\alpha, \beta, \gamma_{i-1})\,\delta_2^{i-1}] + f_1(\alpha, \beta, \gamma)\,q_\alpha^{+} + f_1^{-}(\alpha, \beta, \gamma)\,q_\alpha^{-} \tag{8}$$
$$(\alpha \leftrightarrow \beta, \quad 1 \leftrightarrow 2, \quad \varphi \leftrightarrow \psi);$$

2) относительная деформация по толщине i-го слоя $e_\gamma^{i} = \alpha_3^{i} T$;

3) нормальными напряжениями σ_γ^{i} пренебрегаем.

В формуле (8) $q_\alpha^{\pm}$, $q_\beta^{\pm}$ — поверхностные нагрузки, приложенные на ограничивающих поверхностях оболочки; δ_1^{i}, δ_2^{i}, δ_3^{i} — косинусы углов между нормалью к поверхности контакта смежных слоев $\gamma = \gamma_i$ и направлениями α, β, γ соответственно. Функции $f_1^{\pm}$, $f_2^{\pm}$, $f_{1i}^{\pm}$, $f_{2i}^{\pm}$ выбираются такими, чтобы касательные напряжения (8) удовлетворяли условиям жесткого контакта слоев и условиям на ограничивающих поверхностях.

Из этих предположений следует нелинейный закон распределения перемещений по толщине каждого слоя:

$$u_\alpha^{i} = u + \gamma\vartheta_\alpha + H_1 D_1^{i} + H_1 u_T^{i}, \quad u_\gamma^{i} = w + w_T^{i}, \tag{9}$$
$$H_1 = A\,(1 + k_\alpha \gamma) \qquad (\alpha \leftrightarrow \beta, \ 1 \leftrightarrow 2, \ A \leftrightarrow B),$$

где величины D_1^{i}, D_2^{i} зависят от значений напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ на поверхности контакта смежных слоев и функций φ, ψ, а u_T^{i}, v_T^{i} являются функциями температурных и поверхностных нагрузок.

Учитывая формулы (8), (9), соотношения упругости находим в виде

$$\overline{N} = B_0\overline{U} + B_1\frac{\partial\overline{U}}{\partial\alpha} + B_2\frac{\partial\overline{U}}{\partial\beta} + \sum_{j=1}^{N}\left\{G_0^{(j)}\overline{\sigma}^{j} + G_1^{(j)}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\alpha} + G_2^{(j)}\frac{\partial\overline{\sigma}^{j}}{\partial\beta}\right\} +$$
$$+ M_0\overline{q} + M_1\frac{\partial\overline{q}}{\partial\alpha} + M_2\frac{\partial\overline{q}}{\partial\beta} + \overline{N}_T,$$
$$\overline{N} = \{N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, N_{\beta\alpha}, M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}, M_{\beta\alpha}, Q_\alpha, Q_\beta\}, \tag{10}$$
$$\overline{U} = \{u, v, \vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \varphi, \psi\}, \quad \overline{\sigma}^{j} = \{\sigma_\alpha^{j}(\gamma_{j-1}), \sigma_\alpha^{j}(\gamma_j), \sigma_\beta^{j}(\gamma_{j-1}),$$
$$\sigma_\beta^{j}(\gamma_j), \tau_{\alpha\beta}^{j}(\gamma_{j-1}), \tau_{\alpha\beta}^{j}(\gamma_j)\}, \quad \overline{q} = \{q_\alpha^{+}, q_\alpha^{-}, q_\beta^{+}, q_\beta^{-}\},$$
$$\overline{N}_T = \{N_{\alpha T}, N_{\beta T}, N_{\alpha\beta T}, N_{\beta\alpha T}, M_{\alpha T}, M_{\beta T}, M_{\alpha\beta T}, M_{\beta\alpha T}, 0, 0\},$$

где B_0, B_1, B_2, $G_0^{(j)}$, $G_1^{(j)}$, $G_2^{(j)}$, M_0, M_1, M_2 — матрицы соответствующих размеров.

При построении разрешающих систем для определенных классов оболочек из выражений (10) необходимо исключить компоненты вектора $\overline{\sigma}^{j}$. Для этого используются уравнения равновесия трехмерной задачи для каждого слоя и выражения для напряжений через компоненты вектора $\overline{U}$ и их производные, полученные на основе принятых допущений.

После некоторых преобразований для оболочек вращения получаем разрешающую систему уравнений десятого порядка

$$\frac{d\overline{z}}{ds} = A(s)\,\overline{z} + \overline{g}, \quad \overline{z} = \{u, v, w, \vartheta_s, Q_s, Q_\theta, N_s, N_{s\theta}, M_s, M_{s\theta}\},$$
$$A(s) = \|a_{mn}(s)\| \qquad (m, n = 1, 2, \ldots, 10), \tag{11}$$
$$\overline{g} = \{\overline{g}_1(s), \overline{g}_2(s), \ldots, \overline{g}_{10}(s)\}.$$

Таким образом, во всех рассмотренных моделях для оболочек вращения получены разрешающие уравнения десятого порядка с переменными коэффициентами, для решения которых применяется устойчивый численный метод, что дает возможность получать решения для оболочек различных форм подверженных действию неравномерных нагрузок.

Приемлемость принятых предположений можно оценивать, сравнив полученные на основе рассматриваемых моделей решения с соответствующими точными решениями трехмерных задач.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние свободно опертой трехслойной цилиндрической оболочки, подверженной действию осесимметричного давления $q_n = q_0 \sin \frac{\pi}{l} s$. Радиус срединной оболочки равен R, толщина внешних слоев h, среднего — H, модули упругости слоев равны соответственно E и E_0. Решение задачи выполнено при значениях $R = l = 50$; $H = 2$; $h = 0{,}2$; $E_0 = 10^{-3}E$, $\nu = 0{,}3$. Линейные размеры здесь отнесены к единице длины. Результаты решения задачи для амплитудных значений осевого перемещения представлены в таблице. В первом, втором и третьем столбцах находятся величины, полученные соответственно по теории недеформируемых нормалей, теории, изложенной в п. 3 настоящей статьи, и точной теории. Для внутреннего слоя $x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{H}\right)$, для среднего $x = \frac{\gamma}{H}$ и для внешнего слоя $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{H}\right)$.

x	$u_s/10^3 q_0 E^{-1}$		
	Внешний слой		
1	0,1190	0,4226	0,3655
0,9	0,1339	0,4380	0,3797
0,8	0,1488	0,4534	0,3938
0,7	0,1636	0,4688	0,4080
0,6	0,1785	0,4842	0,4221
0,5	0,1934	0,4995	0,4363
	Средний слой		
0,5	0,1934	0,4995	0,4363
0,3	0,3422	0,5682	0,4695
0,1	0,4910	0,5851	0,5103
—0,1	0,6398	0,5847	0,5591
—0,3	0,7886	0,6017	0,6160
—0,5	0,9376	0,6705	0,6812
	Внутренний слой		
—0,5	0,9376	0,6705	0,6812
—0,6	0,9525	0,6857	0,6972
—0,7	0,9674	0,7011	0,7133
—0,8	0,9822	0,7165	0,7294
—0,9	0,9971	0,7318	0,7455
—1,0	1,0120	0,7473	0,7616

Как следует из приведенных данных, погрешность в определении максимальных значений перемещений равна 2% по уточненной теории, в то время как по классической теории она составляет более 50%. Это указывает на большие возможности уточненных теорий в определении напряженного состояния существенно неоднородных по толщине оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974. 446 с.
2. *Болотин В. В.* К теории слоистых плит.— Изв. АН СССР. Механика и машины, 1963. № 3, с. 65—72.
3. *Василенко А. Т., Голуб Г. П., Григоренко Я. М.* Определение напряженного состояния многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке.— Прикл. механика, 1976, 12, № 2, с. 40—47.
4. *Григолюк Э. И.* Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем.— Изв. АН СССР. Механика и машины, 1958, № 1, с. 26—34.
5. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* К расчету напряженного состояния толстостенных неоднородных анизотропных оболочек.— Прикл. механика, 1974, 10, № 5, с. 86—93.
6. *Королев В. И.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки из армированных пластмасс. М., «Машиностроение», 1965. 272 с.
7. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К., «Наук. думка», 1973. 248 с.
8. *Подстригач Я. С., Пелех Б. Л.* Термоупругие задачи для оболочек и пластин с низкой сдвиговой жесткостью.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1970, вып. 10, с. 17—23.
9. *Прусаков А. П.* Конечные прогибы многослойных пологих оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3, с. 119—125.
10. *Рябов О. Ф.* Розрахунок багатошарових оболонок. К., «Будівельник», 1968. 100 с.

Институт механики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.IX 1976 г.