42. *Лопушанський О. В.* До питання про розташування нулів функцій в заданій області.— Тези допов. III конф. молодих науковців. Львів, 1975, с. 14.
43. *Лопушанский О. В.* Об аналитических функциях с нулями в одной полуплоскости.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры. К., 1976, с. 103—104.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.IX 1976 г.

УДК 531.31

А. И. Балинский

ПОВЕДЕНИЕ ЧАСТОТ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную гироскопическую систему, описываемую матричным дифференциальным уравнением

$$A\ddot{q} + G\dot{q} + Cq = 0, \tag{1}$$

где A и C — вещественные, симметрические, положительно определенные $n \times n$-матрицы соответственно кинетической и потенциальной энергий; G — кососимметрическая $n \times n$-матрица гироскопических сил, $q \in R^n$. Нетрудно показать, что корни характеристического уравнения

$$\det (k^2A + kG + C) = 0 \tag{2}$$

чисто мнимые, причем если k — корень уравнения, то и число $-k$ будет корнем этого уравнения. Значит, рассматриваемая система имеет n собственных частот.

Переходя в уравнении (2) к частотному параметру λ ($k=i\lambda$), будем исходить из матричного пучка

$$L(\lambda) = \lambda^2 A - \lambda iG - C,$$

спектр которого, очевидно, вещественный и симметричный относительно начала координат. Пучку $L(\lambda)$ поставим в соответствие (см., например, [4]) матричный пучок

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2\mathcal{A}_0 + \lambda\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2,$$

где

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} —$$

симметрические матрицы, 0 — нулевая матрица размера $n \times n$.

Лемма 1. *Спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ дважды воспроизводит спектр пучка $L(\lambda)$.*

Доказательство. С помощью элементарных преобразований получаем, что $\det \mathcal{L}(\lambda)$ с точностью до знака равен $[\det L(\lambda)]^2$.

Перейдем от нелинейной задачи о соответственных значениях пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ к эквивалентной линейной. Для этого введем матрицу

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_1 \end{bmatrix},$$

где 0, I — соответственно нулевая и единичная $2n \times 2n$-матрицы.

Лемма 2. *Спектры пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ и матрицы $\tilde{A}_0$ совпадают.*

Доказательство этой леммы приведено в работе [1].

Из общей теоремы о симметризации сопровождающей матрицы полиномиального операторного пучка [2], примененной к $\mathcal{L}(\lambda)$, вытекает такая лемма.

Лемма 3. *Матрицы* $\tilde{A}_0^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *симметризуемы слева положительно определенной матрицей*

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_0 \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать регулярный пучок матриц $\tilde{L}(\lambda) = \tilde{A}_2 - \lambda\tilde{S}$, $\tilde{A}_2 = \tilde{S}\tilde{A}_0^2$, собственные значения которого совпадают с квадратами собственных частот системы (1), и соответствующий ему функционал

$$p(\tilde{x}) = \frac{(\tilde{A}_2\tilde{x}, \tilde{x})}{(\tilde{S}\tilde{x}, \tilde{x})}, \quad \tilde{x} = \{x_1, x_2\} \in R^{2n} \oplus R^{2n}.$$

Покажем, что функционал $p(\tilde{x})$ монотонно зависит от матрицы кинетической энергии. Пусть $\hat{A} \geqslant A$ в том смысле, что $(\hat{A}y, y) \geqslant (Ay, y)\ \forall\, y \in R^n$. Тогда

$$p(\tilde{x}) = \frac{\| \mathcal{A}_0^{-1/2}(\mathcal{A}_2x_1 - \mathcal{A}_1x_2)\|^2 + (\mathcal{A}_2x_2, x_2)}{(\mathcal{A}_0x_2, x_2) + (\mathcal{A}_2x_1, x_1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\| \hat{\mathcal{A}}_0^{-1/2}(\mathcal{A}_2x_1 - \mathcal{A}_1x_2)\|^2 + (\mathcal{A}_2x_2, x_2)}{(\hat{\mathcal{A}}_0x_2, x_2) + (\mathcal{A}_2x_1, x_1)} = \hat{p}(\tilde{x}).$$

Монотонную зависимость от матрицы потенциальной энергии проще установить, если исходить из матричного пучка $\mu^2C + \mu iG - A$. На основании теоремы 15 [3, с. 292] получаем результат, который имеет следующую механическую интерпретацию.

Теорема. *При увеличении жесткости системы* (1.1), *т. е. при увеличении формы* (Cq, q) *для потенциальной энергии (без изменения* A *и* G), *частоты могут только увеличиться, а при увеличении инерции системы* (1.1), *т. е. при увеличении формы* (Aq, q) *для кинетической энергии (без изменения* G *и* C) *частоты могут только уменьшиться.*

Этот результат можно перенести на системы с бесконечным числом степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения. Канд. дис. Львов, 1972. 113 с.
2. *Балінський А. І., Зорій Л. М.* Про один спосіб дослідження спектра поліноміальних пучків самоспряжених операторів у гільбертовому просторі.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 6, с. 485—488.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967. 575 с.
4. *Lancaster* P. Lambda-matrices and vibrating systems. Oxford, Pergamon Press, 1966. 168p.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.X 1976 г.

УДК 539.377

Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ УТОЧНЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Для решения задач, связанных с расчетом оболочечных элементов конструкций, используется теория, основанная на предположении о сохранении нормального элемента. Во многих случаях применение классической теории приводит к удовлетворительным результатам. Однако для оболочек, обладающих значительной анизотропией и неоднородностью механических и теплофизических свойств, предположения классической теории требуют уточнения,