48. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д.* Об оптимизации напряженного состояния в зоне локальной термообработки оболочек вращения.— Прикл. механика, 1975, № 5, с. 3—7.
49. *Подстригач Я. С., Горячева З. И., Бурак Я. И. и др.* О влиянии профиля температурного поля на релаксацию остаточных напряжений при локальном нагреве кольцевых сварных швов.— ФХММ, 1970, № 1, с. 42—45.
50. *Подстригач Я. С., Марченко И. С., Бурак Я. И. и др.* Определение оптимальных режимов нагрева оболочек кинескопов при откачке для увеличения производительности откачных железных дорог.— Электронная техника. Сер. 4, 1975, № 1, с. 78—83.
51. *Подстригач Я. С., Пелех Б. Л., Сиренко И. Г.* Экстремальные задачи термоупругости для ортотропных слоистых цилиндрических оболочек.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1973, вып. 13, с. 67—70.

Львовский филиал математической
физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15. IX 1976 г.

УДК 534.1 : 531.221.3; 517.948

Л. М. Зорий

К РАЗВИТИЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРУГИХ И ГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ

Общие закономерности развития теории колебаний и устойчивости деформируемых систем, ее основных понятий и методов, а также запросы современной техники требуют расширения области теоретических исследований и совершенствования соответствующих расчетных моделей. В частности, необходима дальнейшая разработка методов исследования континуальных механических систем, эффективных способов определения их частот и критических нагрузок как функций различных параметров, аналитических методов исследования задач гидроупругости, способов получения качественных результатов и построения инженерных формул для оценки влияния разнообразных факторов (жесткостных, геометрических и массовых характеристик, свойств действующих нагрузок, демпфирования и упругих несовершенств, характеристик сред и др.) на устойчивость и малые колебания деформируемых систем.

Постановке и изучению указанных вопросов посвящены многие работы советских и зарубежных ученых. Современное состояние теории колебаний и устойчивости деформируемых систем освещено в ряде монографий и обзоров [1—13]. В настоящей статье приведен обзор работ, выполненных во Львовском филиале математической физики Института математики АН УССР по развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.

Общий подход к изучению колебаний и устойчивости механических систем, получивший название динамического метода (метода малых колебаний), заключается, как известно, в исследовании движений данной системы около невозмущенного состояния. При этом выводы о характере ее поведения получают путем анализа линеаризованных уравнений возмущенного движения. Применимость такого подхода к системам с конечным числом степеней свободы изучена с достаточной полнотой А. М. Ляпуновым в его основополагающих исследованиях устойчивости по первому приближению. Для континуальных систем вопросы обоснования динамического метода, как и установления существования и единственности решений соответствующих нелинейных задач, изучены в общем недостаточно.

Обоснованию метода малых колебаний для одного класса механических систем с распределенными параметрами посвящены работы [14—18], где рассмотрены упругие системы (одно- и двумерный случаи) под действием консервативных и неконсервативных нагрузок и при наличии сил трения, пропорциональных распределению масс и скоростям, исследование возмущенных движений которых сводится к некоторым смешанным задачам для дифференциальных уравнений с определенными нелинейностями. Предполагается, что коэффициенты задачи достаточно гладкие и непрерывно зависят от параметров нагрузок и при отсутствии нагрузок ($P = (P_1, P_2, \ldots \ldots, P_k) = 0$) невозмущенная форма равновесия устойчива, а при превышении некоторых значений $P = P^*$ имеет место либо эйлерова, либо автоколебательная потеря устойчивости. Нулевое решение соответствует невозмущенной форме равновесия системы.

Исследование рассматриваемой нелинейной задачи проведено сведением ее к некоторой эквивалентной задаче Коши для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом использованы свойства соответствующей обобщенной задачи на собственные значения, в частности существование в пространстве параметров нагрузок некоторой минимальной области Q такой, что для $P \in Q$ все собственные значения (частоты собственных колебаний соответствующей упругой системы без трения) являются положительными и простыми.

При достаточно общих предположениях на малые нелинейности, начальные возмущения и граничные условия рассматриваемой задачи установлены теоремы существования и единственности решений при значениях параметра нагрузки P, принадлежащего области Q или являющегося достаточно близкой к ее границе внешней точкой, и даны естественные обобщения теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости по первому приближению. При этом устойчивость (неустойчивость) нулевого решения исходной нелинейной задачи определяется поведением собственных значений как функций нагрузок и параметров системы упомянутой выше обобщенной задачи.

Отметим, что проведенное обоснование динамического метода при условии отсутствия дестабилизации можно распространить на более сложные случаи (упругие системы, несущие абсолютно жесткие тела, системы с ребрами жесткости и др.).

Для качественного исследования малых колебаний и устойчивости равновесия континуальных загруженных многопараметрических упругих систем, определения частот и критических нагрузок, соответствующих дивергенции или флаттеру, а также изучения их зависимости от различных параметров разработан метод характеристических рядов [17—33], основой которого является построение характеристического ряда системы (задачи) с последующим применением обобщенных критериев устойчивости и двусторонних оценок [14, 15, 19—22].

С помощью этого метода получены общие уравнения для приближенного определения критических значений, установлены априорные условия отсутствия дестабилизации [15, 17, 23], предложены новые качественные подходы к исследованию влияния различных факторов на динамическое поведение систем с распределенными параметрами [17, 26], развиты способы определения с недостатком и избытком низших частот колебаний и критических значений при эйлеровой [17, 24] и автоколебательной потерях устойчивости [15, 17, 27, 28], разработаны новые приемы построения инженерных формул для расчета влияния различных параметров на критические силы и основную частоту [29]. Развитию аналитических способов определения коэффициентов характеристических рядов посвящены работы [30—33].

Упомянутый выше метод использован для решения многих достаточно сложных задач динамики, в том числе для одномерных систем с переменным распределением жесткостей и масс, с упругими опорами и закреплениями, несущих абсолютно твердые тела [17, 21, 32], для свободно опертых пластин (пологих оболочек) сложной формы в плане [22, 33], для тонкостенных стержней [17] и др. Сравнением метода характеристических рядов с обычно применяемыми, в которых вопросы о достигнутой степени точности, как правило, остаются открытыми, показана его рациональность и эффективность, особенно при определении низших частот и критических значений как функций параметров системы и приложенных к ней нагрузок, а также установлена более широкая область его применения. Данный метод применим, например, к исследованию ряда краевых задач с производными по времени в уравнении и краевых условиях [17, 21], к задачам о колебаниях упругих систем в жидкости, к обобщенным задачам с неклассическими граничными условиями, возникающим в проблемах гидроупругости [34] и др.

На основе метода характеристических рядов разработаны также новые подходы к приближенному определению критических значений, соответствующих флаттеру линейных упруговязких систем [17, 28].

Исследование малых колебаний упругих и гидроупругих систем сводится, как правило, к задачам о собственных значениях линейных операторов и их обобщениям — нелинейным по спектральному параметру и многопараметрическим задачам. Однако, несмотря на наличие классической теории и известных результатов для такого рода обобщенных задач, необходима дальнейшая разработка вопросов качественного анализа распределения собственных значений и их зависимости от параметров, а также методов определения собственных значений.

Для нелинейных по спектральному параметру задач (полиномиальные пучки самосопряженных операторов) разработан общий метод симметризации [25, 35]. Установлены необходимые и достаточные условия равномерной дефинитности симметризатора эквивалентной линейной задачи, что открыло возможности использования при исследовании нелинейных задач результатов и методов классической теории. Определенная реализация этих возможностей дана в работах [17, 25, 36].

Вопросы сведения задач о колебаниях упругих систем в жидкости к классическим задачам на собственные значения рассмотрены в работе [37].

Стационарным и нестационарным задачам гидроупругости посвящены многие работы, в которых, как правило, применяется метод интегральных преобразований. При этом возникают существенные трудности, связанные с обращением интегральных преобразований.

В последнее время предложен аналитический метод исследования указанных задач, представляющий собой распространение на них операторных методов [38]. При этом исходная задача сводится к последовательности задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Данным методом исследован, в частности, ряд стационарных и нестационарных задач гидроупругости для сферических оболочек, находящихся под действием радиального периодического давления, некоторые задачи с учетом геометрических и физических нелинейностей и др.

Ряд работ посвящен установлению критериев устойчивости решений дифференциальных уравнений. Для случая обыкновенных дифференциальных уравнений в работе [39] предложен эффективный критерий устойчивости многочленов. В работе [40] дано обобщение этого критерия на случай полиномиальных операторных пучков, соответствующих уравнениям с частными производными.

Исследованию обобщенной проблемы Рауса — Гурвица и некоторых сходных вопросов посвящены работы [41—43], в которых указанная проблема решена для ряда важных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961. 339 с.
3. *Болотин В. В., Григолюк Э. И.* Устойчивость упругих и неупругих систем.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М., 1972, с. 325—363.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967. 984 с.
5. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек. Л., «Судостроение», 1974. 208 с.
6. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. К., «Наук. думка», 1971. 276 с.

7. *Джанелидзе Г. Ю.* Устойчивость упругих систем при динамических нагрузках.— В кн.: Проблемы устойчивости в строительной механике. М., 1965, с. 68—84.
8. *Леонов М. Я.* Основы механики упругого тела. Т. 1. Фрунзе, Изд-во АН КиргССР, 1963. 87 с.
9. *Эхо-сигналы* от упругих объектов. Т. 2. Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1974. 346 с. Авт.: *У. К. Нигул, Я. А. Метсавээр, Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер.*
10. *Новичков Ю. Н.* IV Всесоюзная конференция по проблемам устойчивости в строительной механике.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1, с. 188—191.
11. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969. 696 с.
12. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М., «Машиностроение», 1970. 734 с.
13. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1969. 440 с.
14. *Зорий Л. М.* К теории устойчивости равновесия систем с распределенными параметрами.— Материалы респ. симпозиума по диф. уравнениям. Одесса, 1968, с. 30.
15. *Зорій Л. М.* До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами.— Допов. АН УРСР, № 11, 1968, с. 992—995.
16. *Байдак Д. А.* Вопросы обоснования динамического метода и применения двусторонних оценок при исследовании малых колебаний и устойчивости равновесия упругих стержней. Автореф. канд. дис. Львов, 1973. 11 с.
17. *Зорий Л. М.* Развитие динамического метода исследования механических систем с распределенными параметрами. Автореф. докт. дис. Львов, 1974. 21 с.
18. *Подстригач Я. С., Байдак Д. А., Зорий Л. М.* К обоснованию динамического метода исследования упругих систем.— ДАН СССР, 1974, 214, № 5, с. 1049—1051.
19. *Зорий Л. М.* К теории устойчивости равновесия систем с распределенными параметрами.— III Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике. М., 1968, с. 139.
20. *Зорий Л. М.* Об условиях отсутствия дестабилизации в системах с распределенными параметрами.— Прикл. механика, 1969, 5, № 9, с. 98—102.
21. *Зорій Л. М.* Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами.— Допов. АН УРСР, 1968, № 12, с. 1072—1075.
22. *Зорий Л. М.* К развитию приближенных способов определения критических нагрузок упругих систем.— IV Всесоюз. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике. Харьков, 1972, с. 19—20.
23. *Гайвась Б. І., Зорій Л. М.* Про вплив тертя на стійкість циліндричних оболонок у надзвуковому газовому потоці.— Допов. АН УРСР, 1970, № 9, с. 807—810.
24. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— ФХММ, 1971, № 3, с. 99—100.
25. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения. Автореф. канд. дис. Львов, 1972. 8 с.
26. *Бердник Я. С., Зорій Л. М.* Один спосіб якісного дослідження коливань і стійкості систем з розподіленими параметрами.— Допов. АН УРСР, 1973, № 7, с. 621—623.
27. *Зорій Л. М., Ісаєв Ю. І.* Двосторонні оцінки критичних параметрів пружних систем при флаттері.— Допов. АН УРСР, 1973, № 6, с. 529—531.
28. *Исаев Ю. И.* Двусторонние оценки критических нагрузок в неконсервативных задачах упругой устойчивости. Автореф. канд. дис. Львов, 1975. 23 с.
29. *Подстригач Я. С., Зорий Л. М.* К развитию метода характеристических рядов в задачах устойчивости деформируемых систем.— V Всесоюз. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике. Л., 1977, с. 14—15.
30. *Балінський А. І., Зорій Л. М.* Про одне зображення загального розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.— Допов. АН УРСР, 1971, № 3, с. 195—197.
31. *Парасюк Е. М., Зорій Л. М.* Про звідність систем звичайних диференціальних рівнянь.— Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1973, вип. 75, с. 36—40.
32. *Байдак Д. А., Зорій Л. М.* Про дослідження коливань і стійкості стержнів змінної жорсткості методом двосторонніх оцінок.— Допов. АН УРСР, 1972, № 6, с. 548—551.
33. *Зорій Л. М., Тацій Р. М.* До дослідження коливань і стійкості пружних пластинок довільної форми.— Допов. АН УРСР, 1974, № 2, с. 154—157.
34. *Підстригач Я. С.* Про один випадок ускладнення граничних умов в задачах гідропружності.— Допов. АН УРСР, 1975, № 3, с. 235—238.
35. *Балінський А. І., Зорій Л. М.* Про один спосіб дослідження спектра поліноміальних пучків самоспряжених операторів у гільбертовому просторі.— Допов. АН УРСР, 1972, № 6, с. 485—488.
36. *Балінський А. І., Зорій Л. М.* Про застосування методу симетризації до одного класу оператор-функцій.— Допов. АН УРСР, 1974, № 9, с. 771.
37. *Сторож О. Г.* Зведення одного класу задач про коливання пружних пластин в рідині до класичної задачі на власні значення.— Тези допов. IV конф. молодих науковців. Львів, 1975, с. 8.
38. *Маслов В. П.* Операторные методы. М., «Наука», 1973. 544 с.
39. *Подстригач Я. С., Балинский А. И., Зорий Л. М.* Один критерий устойчивости полиномов.— ДАН СССР, 1974, 219, № 3, с. 553—554.
40. *Балинский А. И.* Об операторных пучках со спектром, лежащим в левой полуплоскости.— ДАН УССР, 1975, № 6, с. 509—513.
41. *Лопушанський О. В.* Взаємозв'язок між функціями класу НВ и розв'язками лінійного диференціального рівняння другого порядку.— Допов. АН УРСР, 1975, № 9, с. 283—285.

42. *Лопушанський О. В.* До питання про розташування нулів функцій в заданій області.— Тези допов. III конф. молодих науковців. Львів, 1975, с. 14.
43. *Лопушанский О. В.* Об аналитических функциях с нулями в одной полуплоскости.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры. К., 1976, с. 103—104.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.IX 1976 г.

УДК 531.31

А. И. Балинский

ПОВЕДЕНИЕ ЧАСТОТ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную гироскопическую систему, описываемую матричным дифференциальным уравнением

$$A\ddot{q}+G\dot{q}+Cq=0, \tag{1}$$

где A и C — вещественные, симметрические, положительно определенные $n\times n$-матрицы соответственно кинетической и потенциальной энергий; G — кососимметрическая $n\times n$-матрица гироскопических сил, $q\in R^n$. Нетрудно показать, что корни характеристического уравнения

$$\det(k^2A+kG+C)=0 \tag{2}$$

чисто мнимые, причем если k — корень уравнения, то и число $-k$ будет корнем этого уравнения. Значит, рассматриваемая система имеет n собственных частот.

Переходя в уравнении (2) к частотному параметру λ ($k=i\lambda$), будем исходить из матричного пучка

$$L(\lambda)=\lambda^2A-\lambda iG-C,$$

спектр которого, очевидно, вещественный и симметричный относительно начала координат. Пучку $L(\lambda)$ поставим в соответствие (см., например, [4]) матричный пучок

$$\mathcal{L}(\lambda)=\lambda^2\mathcal{A}_0+\lambda\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2,$$

где

$$\mathcal{A}_0=\begin{bmatrix}A&0\\0&A\end{bmatrix},\quad \mathcal{A}_1=\begin{bmatrix}0&G\\-G&0\end{bmatrix},\quad \mathcal{A}_2=\begin{bmatrix}C&0\\0&C\end{bmatrix}-$$

симметрические матрицы, 0 — нулевая матрица размера $n\times n$.

Лемма 1. *Спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ дважды воспроизводит спектр пучка $L(\lambda)$.*

Доказательство. С помощью элементарных преобразований получаем, что $\det\mathcal{L}(\lambda)$ с точностью до знака равен $[\det L(\lambda)]^2$.

Перейдем от нелинейной задачи о соответственных значениях пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ к эквивалентной линейной. Для этого введем матрицу

$$\tilde{A}_0=\begin{bmatrix}0&I\\\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_2&-\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_1\end{bmatrix},$$

где 0, I — соответственно нулевая и единичная $2n\times 2n$-матрицы.

Лемма 2. *Спектры пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ и матрицы $\tilde{A}_0$ совпадают.*

Доказательство этой леммы приведено в работе [1].

Из общей теоремы о симметризации сопровождающей матрицы полиномиального операторного пучка [2], примененной к $\mathcal{L}(\lambda)$, вытекает такая лемма.