УДК 539.377

Ю. М. Коляно

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМОМЕХАНИКЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

В последнее время теория обобщенных функций находит все большее применение в термомеханике. В монографиях [18—21, 24] изучены температурные напряжения в элементах конструкций, подвергаемых тепловым воздействиям, которые описываются с помощью ступенчатых функций, дельта-функций Дирака и других обобщенных функций координаты и времени. Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел можно отнести к новому научному направлению в термомеханике армированных и многослойных тел, тел с покрытиями, со сквозными и несквозными включениями, пластин и оболочек с подкрепленным краем. Для развития этого направления необходимо разработать методы решения краевых задач термомеханики кусочно-однородных тел как единого целого, которые позволяли бы получать решение, имеющее одно аналитическое выражение для всей области его определения. В каждом конкретном случае кусочно-однородного тела его физико-механические характеристики могут быть описаны с помощью симметричной $S(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ или асимметричных $S_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $S_+(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$ единичных функций [13]. Использование представления физико-механических характеристик через асимметричные или симметричную единичные функции приводит к одному и тому же решению [13]. Однако благодаря тому, что при представлении физико-механических характеристик кусочно-однородных тел с помощью асимметричных единичных функций в таком же виде записывается любая их комбинация [22], удобней всего представлять физико-механические характеристики через асимметричные единичные функции. Если, например, для многослойного тела физико-механические характеристики представляются в виде

$$p(\zeta) = p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) S_-(\zeta - \zeta_i), \tag{1}$$

то любая комбинация их с помощью тождеств

$$\frac{1}{p(\zeta)} = \frac{1}{p_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{p_i} \right) S_-(\zeta - \zeta_i), \quad S_-(\zeta - \zeta_i) S_-(\zeta - \zeta_i) = S_-(\zeta - \zeta_i) \tag{2}$$

представляется в таком же виде. Решение задач термоупругости для многослойных тел методом сопряжения отдельных элементов с учетом условий идеального термомеханического контакта сводится к решению системы алгебраических уравнений с $2n$ неизвестными коэффициентами. Использовав представление (1) в замкнутом виде, авторы работ [12, 13, 15] получили решения задач термоупругости для многослойного слоя и цилиндра, находящихся в условиях стационарного теплового режима. Полученные решения позволили изучить температурные напряжения в плоском коварово-стеклянном спае электроннолучевых приборов (ЭЛП) и в цилиндрической головке стеклоизоляторов, представляющей пятикомпонентную систему: сталь — цементная связка — стекло — цементная связка — чугун. В работах [5, 10] изучены температурные напряжения в толстостенной цилиндрической и сферической оболочках с заполнителем с использованием установленных в работе [13] свойств произведений асимметричных единичных функций и их производных.

Температурные напряжения в пластинках с несквозными и сквозными включениями изучены в работах [4, 9, 16]. Исходя из гипотезы неизменных нормалей, в работе [4] получены выражения для усилий и моментов, уравнения термоупругости для определения радиального перемещения и прогиба пластин с несквозными тонкостенными включениями и записаны общие интегралы этих уравнений. Рассматриваемая система представляет собой пластину толщиной 2δ, в которую впрессовано инородное включение в виде кольцевого конечного цилиндра высотой d и толщиной $2h$, значительно меньшей радиуса R его срединной поверхности. Физико-механические характеристики такой системы представляются таким образом:

$$p(r, z) = p_1 + (p_0 - p_1)\,[S_-(r - R + h) - S_-(r - R - h)] \times \\ \times [S_-(z - \delta + d) - S_-(z - \delta)]. \tag{3}$$

Любая комбинация их имеет такой же вид. Поскольку толщина включения мала по сравнению с другими его размерами, то в полученных выражениях различных комбинаций физико-механических характеристик можно осуществить предельный переход при $h \to 0$, сохраняя при этом величину $g_0 = 2E_0\delta$ постоянной. В результате получим

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{\lambda_1\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \left(\frac{\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} - K_E\frac{\lambda_1\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right) g_0\delta_-(r - R)\,[S_-(z - \\ - \delta + d) - S_-(z - \delta)], \quad \delta_-(r - R) = \frac{dS_-(r - R)}{dr}, \tag{4}$$

где λ, μ — коэффициенты Ляме; $K_E = \frac{E_1}{E_0}$, E_0, E_1 — модуль упругости включения и основного материала.

Полученные уравнения использованы [9] для изучения установившихся температурных напряжений в узле металлического держателя цветоделительной маски стеклянных оболочек цветных кинескопов. В работе [16] определены и исследованы установившиеся температурные напряжения в пластине с круговой шайбой как элементе ЭЛП. При этом

$$p(r) = p_1 + (p_0 - p_1)\,S_+(R - r). \tag{5}$$

Когда диаметр $2R$ цилиндрического включения меньше толщины пластины, только с помощью представления физико-механических характеристик системы в виде (5) можно получить решение задачи об определении температурных напряжений на стыке включения и основного материала. Рассмотрев толстостенную оболочку с заполнителем как единое целое и представив физико-механические характеристики в виде (1), где $n = 2$, авторы работы [8] получили аналитическое решение задачи теплопроводности для всей области его определения в предположении, что поверхность системы подвергается гармоническому тепловому воздействию. Найдено также температурное поле, соответствующее периодическому изменению во времени температуры внешней среды. Исследовано изменение температуры на стыке стеклянной толстостенной оболочки и стержневого коварового включения в зависимости от критериев Предводителева и Фурье. Решение соответствующей динамической задачи термоупругости получено Е. Г. Иваныком.

Неустановившееся температурное поле в состыкованных пластинках изучено в работе [11], где дан вывод уравнения теплопроводности для определения температурного поля в пластине, состоящей из состыкованных разнородных пластин, и в качестве примера определено нестационарное температурное поле в теплоизолированной по торцевым поверхностям полосе-пластинке, состоящей из двух разнородных полос-пластинок. Если система нагревается внешней средой температуры $t_c(\tau)$ по боковым поверхностям $z = \pm\delta$ путем конвективного теплообмена, то с помощью представления вида (1) физико-механических характеристик многослойного тела температурное поле в рассматриваемой кусочно-однородной полосе-пластинке записывается так:

$$T = t_c(\tau) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(\mu_n)}\left[\frac{\mathrm{Bi}_2}{\mu_n^2} - \frac{\mathrm{Bi}_1}{\beta_n^2}\left(\frac{\delta}{x_2 - x_1}\right)^2\right]\left[\Phi_1(\mu_n) S_+(x_1 - x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{K_\lambda}\Phi_2(\mu_n) S_-(x - x_1)\right]\int_0^\tau \frac{dt_c(\xi)}{d\xi} e^{-(\beta_n^2 + \mathrm{Bi}_1)\frac{a_1(\tau-\xi)}{\delta^2}} d\xi, \quad (6)$$

где

$$\Phi_1(\mu_n) = \mu_n \sin\mu_n \cos\frac{x}{\delta}\beta_n, \quad \Phi_2(\mu_n) = \frac{x_2 - x_1}{\delta}\beta_n \sin\frac{x_1}{\delta}\beta_n \cos\frac{x - x_2}{x_2 - x_1}\mu_n,$$

$$\psi(\mu_n) = (\beta_n^2 + \mathrm{Bi}_1)\left[\frac{\sin\mu_n}{K_a\mu_n}\cos\beta_n\frac{x_1}{\delta} + \frac{\delta\cos\mu_n}{(x_2 - x_1)K_\lambda\beta_n}\sin\frac{x_1}{\delta}\beta_n + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{K_a} + \frac{x_1}{K_\lambda(x_2 - x_1)}\right)\cos\mu_n\cos\frac{x_1}{\delta}\beta_n -$$

$$\left. - \left(\frac{x_1\delta\mu_n}{(x_2 - x_1)^2\beta_n} + \frac{(x_2 - x_1)\beta_n}{K_\lambda K_a\delta\mu_n}\right)\sin\mu_n\sin\frac{x_1}{\delta}\beta_n\right],$$

$$K_\lambda = \frac{\lambda_2^t}{\lambda_1^t}, \quad K_a = \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta_n = \sqrt{K_a\left[\mathrm{Bi}_2 + \left(\frac{\delta}{x_2 - x_1}\right)^2\mu_n^2\right] - \mathrm{Bi}_1},$$

λ_i^t, a_i, $\mathrm{Bi}_i = \frac{\alpha_i\delta}{\lambda_i^t}$ — коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и критерии Био сопрягаемых полос ($i = 1, 2$); μ_n — корни характеристического уравнения $\mu\,\mathrm{tg}\,\mu + \frac{x_2 - x_1}{K_\lambda\delta}\beta_n\,\mathrm{tg}\left(\frac{x_1}{\delta}\beta_n\right) = 0$. Уравнения соответствующей квазистатической задачи термоупругости для состыкованных пластинок и температурные напряжения, обусловленные температурным полем (6), получены В. С. Поповичем.

Уравнения с сингулярными коэффициентами обобщенной динамической задачи термоупругости для слоя, цилиндра и шара с тонкими включениями получены в работе [22]. Представив физико-механические характеристики рассматриваемых кусочно-однородных тел в виде

$$p(\zeta) = p_1 + (p_0 - p_1)[S_-(\zeta - R + h) - S_+(\zeta - R - h)], \quad (7)$$

в таком же виде можно получить представления и любых комбинаций этих характеристик, где R — расстояние от начала координат до срединной поверхности включения. Поскольку толщина $2h$ включений очень мала по сравнению с размерами рассматриваемых кусочно-однородных тел, в выражениях для этих комбинаций можно осуществить предельный переход при $h \to 0$, сохраняя постоянными приведенную теплопроводность, плотность и жесткость на растяжение — сжатие включения. Подставив полученные выражения различных комбинаций физико-механических характеристик в исходные уравнения теплопроводности и термоупругости для неоднородных рассматриваемых тел, придем к уравнениям с сингулярными коэффициентами обобщенной термоупругости для тел с тонкими включениями. К решению полученных уравнений сводится обобщенная динамическая задача термоупругости для пространства, содержащего инородное пластинчатое включение, срединная поверхность которого совпадает с плоскостью $x = 0$ и в области которого действуют с начального момента времени равномерно распределенные источники тепла. Установившиеся температурные поля и напряжения в пластинках и оболочках при кусочно-постоянных коэффициентах теплоотдачи определены в работах [6, 7, 25]. Метод решения задач теплопроводности в этом случае состоит в представлении коэффициентов теплоотдачи с помощью единичных функций координаты, что приводит к дифференциальным уравнениям с коэффициентами типа ступенчатых функций. Применен этот метод в работе [17] для решения двух задач нагрева пластинок несквозным цилиндрическим и полосовым периодическими источниками тепла. В работах [23, 25] определено нестационарное температурное поле в тонкостенных элементах конструкций (бесконечные цилиндрическая оболочка, пластинка и стержень кругового поперечного сечения), подвергаемых локальному нагреву по узкой зоне внешней средой или внутренними источниками тепла, и изучены температурные напряжения в бесконечной пластинке, нагреваемой источниками тепла. В работе [25] определены установившиеся температурные напряжения в бесконечной пластинке и цилиндрической оболочке, нагреваемых по узкой кольцевой зоне, а также в полосе-пластинке, нагреваемой по узкой зоне, параллельной ее торцам. При этом коэффициент теплоотдачи выражается через дельта-функцию Дирака. На примере полупространства и бесконечной пластинки проиллюстрирован метод определения установившихся температурных полей и напряжений в массивных телах и тонкостенных элементах конструкций, подвергаемых нагреву внешней средой по областям малых размеров. В этом случае температура поверхности области нагрева заменяется соответственно ее интегральной характеристикой

$$\vartheta = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t\,|_{z=0}\,dx, \quad \vartheta = \frac{2}{R^2}\int_{0}^{R} rt\,|_{z=+\delta}\,dr, \tag{8}$$

что позволяет значительно упростить уравнения теплопроводности и получить приближенные решения, совпадающие с полученными для этих случаев автором, Е. Г. Грицько и А. Н. Куликом точными решениями.

Упомянутые работы посвящены определению одномерных температурных полей и напряжений в кусочно-однородных телах. В работе [2] рассмотрена двумерная стационарная задача теплопроводности для многослойного полупространства, нагреваемого действующими на расстоянии $x = d$ от краевой поверхности источниками тепла, периодически изменяющимися по координате y. При этом коэффициент теплопроводности представляется через симметричную единичную функцию. Изучено также температурное поле в системе, состоящей из слоя и полупространства, из полупространства с одним армирующим слоем.

Уравнение теплопроводности с коэффициентами типа дельта-функции Дирака и ее производной для слоя с инородным тонкостенным включением в виде перпендикулярной его основанию полосы-пластинки выведено в работе [14]. Это уравнение использовано для определения двумерного нестационарного температурного поля в стекло-ситаллоцементном узле цветного кинескопа, возникающего в процессе его откачки. Температурные напряжения определены для случая, когда стекло и ситаллоцемент отличаются лишь коэффициентами термического расширения.

Представляет значительный интерес разработка методов решения двумерных и пространственных задач для кусочно-однородных тел, физико-механические характеристики которых можно представить через произведения единичных функций от различных координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964. 517 с.
2. *Гульчевский Л. С., Кулик А. Н.* Двумерная задача теплопроводности для многослойных тел.— ФХОМ, 1976, № 3, с. 33—38.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970. 307 с.
4. *Коляно Ю. М., Волос В. О.* Рівняння термопружності для пластин із ненаскрізними тонкостінними включеннями.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 9, с. 797—801.
5. *Коляно Ю. М., Волос В. О., Подкова Я. И.* Термоупругость толстостенной цилиндрической оболочки с заполнителем.— Проблемы прочности, 1976, № 9, с. 62—64.
6. *Коляно Ю. М., Дидык В. З., Кордуба Б. М.* Учет переменной теплоотдачи при нагреве пластинки полосовым источником тепла.— ФХММ, 1976, № 3, с. 123; ВИНИТИ, деп. № 102—76 от 12.01.76.

7. *Коляно Ю. М., Дідик В. З., Кордуба Б. М.* Температурні напруження в пластинках при залежних від координати коефіцієнтах тепловіддачі.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 6, с. 516—519.
8. *Коляно Ю. М., Иваньк Е. Г.* Периодическое температурное поле в составном цилиндре.— ФХОМ, 1976, № 6, с. 45—49.
9. *Коляно Ю. М., Малкиель Б. С., Волос В. О., Кушнир Р. М.* Температурные напряжения в металло-стеклянном узле держателя цветного кинескопа.— В кн.: Качество, прочность, надежность и технологичность электроннолучевых приборов. К., 1976, с. 140—152.
10. *Коляно Ю. М., Махоркин И. Н.* Термоупругость толстостенной сферической оболочки с заполнителем.— Проблемы прочности, 1976, № 11, с. 84—86.
11. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Нестационарное температурное поле в состыкованных пластинках.— ФХОМ, 1975, № 5, с. 16—23.
12. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Термоупругость многослойных тел.— ДАН УССР, Сер. А, 1975, № 12, с. 1112—1117.
13. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой.— ФХММ, 1976, № 2, с. 108—112.
14. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Температурные напряжения в стеклоситаллоцементном узле цветного кинескопа.— В кн.: Качество, прочность, надежность и технологичность электроннолучевых приборов. К., 1976, с. 49—53.
15. *Коляно Ю. М., Процюк Б. В.* Термоупругость многослойного цилиндра.— ДАН УССР. Сер. А, 1976, № 8, с. 718—721.
16. *Коляно Ю. М., Семерак М. М., Дячишин А. С.* Исследование температурных напряжений в элементах ЭЛП с инородными круговыми включениями.— В кн.: Качество, прочность, надежность и технологичность электроннолучевых приборов. К., 1976, с. 39—42.
17. *Кулик А. Н., Дидык В. З.* Температурное поле в пластинках с кусочно-постоянными коэффициентами теплоотдачи.— В кн.: Тепломассообмен. Минск, 1976, с. 239—248.
18. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
19. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М., «Мир», 1970. 256 с.
20. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
21. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., «Наук. думка», 1972. 308 с.
22. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Уравнения обобщенной термоупругости для тел с тонкими включениями.— ДАН СССР, 1975, 224, № 4, с. 794—797.
23. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Учет теплоотдачи при локальном нагреве тонкостенных элементов конструкций.— ДАН СССР, 1975, 225, № 4, с. 778—781.
24. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. К., «Наук. думка», 1976. 312 с.
25. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. К., «Наук. думка», 1977. 160 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.IX 1976 г.

УДК 539.377+621.785.2

Л. П. Беседина, С. Ф. Будз, Ю. Д. Зозуляк

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УСЛОВИЯМ ТЕРМООБРАБОТКИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

В последнее время во Львовском филиале математической физики Института математики АН УССР выполнен ряд работ по оптимизации напряженного состояния в тонких пластинках и оболочках применительно к задачам высокотемпературной и низкотемпературной локальной обработки с целью снятия остаточных напряжений в элементах сварных тонкостенных конструкций, а также термообработки электровакуумных приборов. В настоящей статье приводим обзор этих работ.

Развитые теоретические основы оптимизации локальной термообработки сварных оболочек наиболее полно изложены в работах [42, 43]. Аналитические исследования по определению температурных полей, обеспечивающих