УДК 534.26

А. П. Поддубняк, Я. С. Подстригач, Д. В. Грилицкий

ЗАДАЧА ГИДРОАКУСТИКИ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим упругую толстостенную оболочку вращения, изготовленную из однородного изотропного материала, внутренняя и внешняя поверхности которой мало отличаются от сферических. Предположим, что данный упругий объект расположен в безграничном пространстве, заполненном идеальной сжимаемой невязкой жидкостью (рис. 1). Полость оболочки заполнена жидкостью с теми же свойствами, но с другими механическими параметрами.

Считаем, что точка 0 является началом сферической (r, θ, φ), цилиндрической (R, φ, z), криволинейной ортогональной (ρ, γ, φ) систем координат и геометрическим центром рассматриваемого упругого тела. В точке A размещен генератор звуковых волн конечной длительности t_0, который включается в некоторый момент времени t и распространяет сферические волны, вызывающие в жидкости давление вида [3]

$$p_i(l, \tau) = p_0 l_0 l^{-1} F(\tau - l)[H(\tau - l) - H(\tau - l - \tau_0)]. \qquad (1)$$

Здесь p_0 — постоянная, имеющая размерность давления; l_0 — безразмерное расстояние от центра источника к центру объекта 0; l — безразмерное расстояние от центра источника A к любой точке среды; $\tau = ct/r_1$, $\tau_0 = ct_0/r_1$ — безразмерное время; c — скорость звука в жидкости; r_1 — характерный линейный размер упругого тела; F — закон изменения давления в импульсе; $H(x)$ — функция Хевисайда.

Задача состоит в определении давления в волне, возникшей в результате взаимодействия акустического импульса и упругого объекта с заполнителем. Для этого нужно решить уравнения движения в жидкости, упругой среде и заполнителе

$$\Box_0^2 p_e = 0; \quad \Box_1^2 \Phi = 0; \quad \Box_2^2 \vec{\Psi} = 0, \quad \Box_3^2 p_f = 0 \qquad (2)$$

при следующих условиях:

1) начальные условия при $\tau = 0$

$$p_e = \frac{\partial p_e}{\partial \tau} = \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = p_f = \frac{\partial p_f}{\partial \tau} = 0, \quad \vec{\Psi} = \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \tau} = 0; \qquad (3)$$

2) условие излучения

$$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) p_e = 0; \qquad (4)$$

3) условия ограниченности функций p_e, p_f в областях, где они определяются;

4) условия гидроупругого контакта при $\rho = \rho_0$

$$\sigma_\rho + p_e = -p_i, \qquad (5)$$

$$\tau_{\rho\gamma} = 0, \qquad (6)$$

$$\tau_{\varphi\rho} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \tau^2} + \frac{r_1}{c^2 g} \frac{1}{H_\rho} \frac{\partial p_e}{\partial \rho} = -\frac{r_1}{c^2 g} \frac{1}{H_\rho} \frac{\partial p_i}{\partial \rho}; \qquad (8)$$

при $\rho = 1$

$$\sigma_\rho + p_f = 0, \tag{9}$$

$$\tau_{\rho\gamma} = 0, \tag{10}$$

$$\tau_{\varphi\rho} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\tau^2} + \frac{r_1}{c^2 g_3}\,\frac{1}{H_\rho}\,\frac{\partial p_f}{\partial\rho} = 0. \tag{12}$$

Здесь p_e и p_f — искомые давления эхо-сигнала и в заполнителе соответственно; σ_ρ, $\tau_{\rho\gamma}$, $\tau_{\varphi\rho}$ — напряжения; u_ρ — нормальная компонента вектора смещения в упругой среде; g и g_3 — плотности акустической среды и заполнителя; H_ρ — геометрический параметр Ляме.

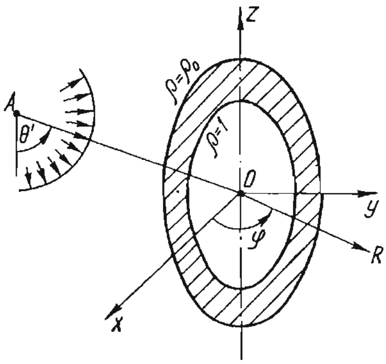

Рис. 1

В формулах (2) $\square_k^2 = \Delta - \beta_k^{-2}\partial^2/\partial\tau^2$, $\beta_k = c_k/c$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ — оператор Даламбера; Δ — оператор Лапласа; $c_0 = c$, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/g_1}$, $c_2 = \sqrt{\mu/g_1}$, c_3 — скорость звука в заполнителе; λ, μ — упругие параметры Ляме; g_1 — плотность материала объекта. Вектор смещения точек упругого тела $\vec{u}$ связан с потенциалами Φ и $\vec{\Psi}$ соотношением [3]

$$\vec{u} = r_1^{-1}(\operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\vec{\Psi})\,(\operatorname{div}\vec{\Psi} = 0).$$

Задачу решаем методом возмущения формы границы [1, 2], согласно которому контур Γ любого меридионального сечения zOR внутренней поверхности упругого тела связан с контуром меридионального сечения единичной сферы функцией $\omega(\zeta)$ (рис. 2):

$$z + iR = r_1^{-1}\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta) = re^{i\theta}, \quad \zeta = \rho e^{i\gamma}, \qquad |\varepsilon| \ll 1. \tag{13}$$

В этом случае сферические координаты r, θ и угол β между нормалями к единичной сфере и внутренней поверхности упругого тела есть функции от ρ, γ и ε.

Представляя искомые величины в виде рядов по степеням ε и учитывая формулы, связывающие скалярные функции, компоненты тензора напряжений и вектора смещений при переходе от сферических координат (r, θ, φ) к криволинейным (ρ, γ, φ), решение сформулированной выше задачи сведем к решению последовательности задач для полой сферы

$$\square_0^2 p_e^j = 0; \quad \square_1^2\Phi^j = 0; \quad \square_2^2\vec{\Psi}^j = 0; \quad \square_3^2 p_f^j = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

при условиях «1» — «3» для функций p_e^j, Φ^j, $\vec{\Psi}^j$, p_f^j и усложненных условиях гидроупругого контакта:

при $\rho = \rho_0$

$$\sigma_r^j + p_e^j = -\sum_{s=0}^{j}\{\Lambda_1^{(j-s)}[p_i^s - (1 - \delta_{sj})(\sigma_r^s + p_e^s)] + (1 - \delta_{sj})[\Lambda_2^{(j-s)}(\sigma_\theta^s - \sigma_r^s) + \Lambda_3^{(j-s)}\tau_{r\theta}^s]\}, \tag{15}$$

$$\tau_{r\theta}^j = -\sum_{s=0}^{j-1}\left[\Lambda_4^{(j-s)}\tau_{r\theta}^s + \frac{1}{2}\Lambda_3^{(j-s)}(\sigma_\theta^s - \sigma_r^s)\right], \tag{16}$$

$$\tau_{\varphi r}^j = -\sum_{s=0}^{j-1}[\Lambda_5^{(j-s)}\tau_{\varphi r}^s + \Lambda_6^{(j-s)}\tau_{\theta\varphi}^s], \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 u_r^j}{\partial\tau^2} - \frac{r_1}{c^2 g}\left(\frac{1}{H_\rho}\frac{\partial p_e}{\partial\rho}\right)^j = -\sum_{s=0}^{j}\left\{\frac{r_1}{c^2 g}\Lambda_7^{(j-s)}[p_i^s + (1 - \delta_{sj})p_e^s] + (1 - \delta_{sj})\left[\Lambda_5^{(j-s)}\frac{\partial^2 u_r^s}{\partial\tau^2} + \Lambda_6^{(j-s)}\frac{\partial^2 u_\theta^s}{\partial\tau^2}\right]\right\}; \tag{18}$$

при $\rho = 1$

$$\sigma_r^j + p_f^j = -\sum_{s=0}^{j-1}\left[\Lambda_1^{(j-s)}(\sigma_r^s + p_f^s) + \Lambda_2^{(j-s)}(\sigma_\theta^s - \sigma_r^s) + \Lambda_3^{(j-s)}\tau_{r\theta}^s\right], \tag{19}$$

$$\tau_{r\theta}^j = -\sum_{s=0}^{j-1}\left[\Lambda_4^{(j-s)}\tau_{r\theta}^s + \frac{1}{2}\Lambda_3^{(j-s)}(\sigma_\theta^s - \sigma_r^s)\right], \tag{20}$$

$$\tau_{\varphi r}^j = -\sum_{s=0}^{j-1}\left[\Lambda_5^{(j-s)}\tau_{\varphi r}^s + \Lambda_6^{(j-s)}\tau_{\theta\varphi}^s\right], \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 u_r^j}{\partial\tau^2} + \frac{r_1}{c^2 g_3}\left(\frac{1}{H_\rho}\frac{\partial p_f}{\partial\rho}\right)^j = -\sum_{s=0}^{j-1}\left[\frac{r_1}{c^2 g_3}\Lambda_7^{(j-s)}p_f^s + \right.$$

$$\left. + \Lambda_5^{(j-s)}\frac{\partial^2 u_r^s}{\partial\tau^2} + \Lambda_6^{(j-s)}\frac{\partial^2 u_\theta^s}{\partial\tau^2}\right]. \tag{22}$$

Здесь функции с верхним индексом суть компоненты разложений искомых величин задачи в ряд по степеням $\varepsilon : \Lambda_n^{(m)}$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$ $n = 1, 2, \ldots, 6)$ $\left(\Lambda_7^{(j)} = \Lambda_5^{(j)}\frac{\partial}{\partial\rho} + \Lambda_6^{(j)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)$ — дифференциальные операторы из работы [2]; δ_{sj} — символ Кронекера. Кроме того, в левых частях условий (15) — (22) произведена формальная замена r на ρ, θ на γ.

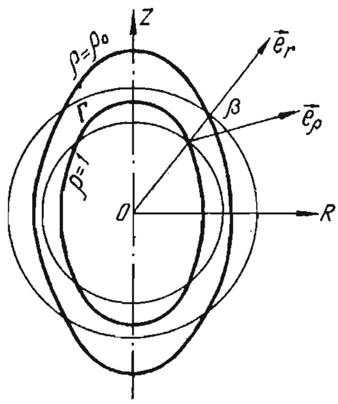

Рис. 2

При решении задачи в каждом j-м приближении применяется преобразование Фурье по времени τ. Так как процесс решения в Фурье-трансформантах аналогичен изложенному в работах [3, 4], то здесь приведем лишь окончательный результат для преобразования Фурье от давления эхо-сигнала — стационарное давление

$$\bar{p}_e(r, \theta, \varphi, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\bar{p}_e^j(r, \theta, \varphi, \omega), \tag{23}$$

где

$$\bar{p}_e^j(r, \theta, \varphi, \omega) = p_0\bar{F}(\omega)\bar{G}_j(\omega), \quad \bar{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau_0}F(\tau)\,e^{i\omega\tau}d\tau; \tag{24}$$

$$\bar{G}_j(\omega) = i\omega l_0\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}q_{mn}x_{mn}^j(\omega)\,h_n(\omega l_0)\,h_n(\omega r)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,$$

$$q_{mn} = N_{mn}\varepsilon_m P_n^m(\cos\theta'), \quad N_{mn} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \tag{25}$$

$$h_n(x) = j_n(x) + in_n(x), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_m = 1 \quad (m \geqslant 1).$$

В формулах (25) P_n^m — присоединенная функция Лежандра; h_n, j_n, n_n — сферические функции Бесселя; ω — параметр преобразования Фурье.

Функция $x_{mn}^j(\omega)$, выражение которой для краткости здесь не приводим, есть решение алгебраической системы уравнений восьмого порядка, коэффициенты которой соответствуют несимметричной задаче гидроакустики для полой сферы, а свободные члены зависят от j.

В предельных случаях, когда объект является абсолютно жестким или абсолютно мягким (вакуумная полость), соответственно получаем

$$x_{mn}^{j}(\omega) = -[\omega h_n'(\omega)]^{-1} \sum_{k=m}^{\infty} \varkappa_{kmn} \left[\int_0^{\pi} \sin\gamma P_n^m(\cos\gamma)\, \Lambda_7^{(j)} j_k(\omega\rho)\, P_k^m(\cos\gamma)\, d\gamma + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{j-1} x_{mk}^{s}(\omega) \int_0^{\pi} \sin\gamma P_n^m(\cos\gamma)\, \Lambda_7^{(j-s)} h_k(\omega\rho)\, P_k^m(\cos\gamma)\, d\gamma \right]_{\rho=1}, \tag{26}$$

$$x_{mn}^{j}(\omega) = -[h_n(\omega)]^{-1} \sum_{k=m}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} \sin\gamma P_n^m(\cos\gamma)\, \Lambda_1^{(j)} j_k(\omega\rho)\, P_k^m(\cos\gamma)\, d\gamma + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{j-1} x_{mk}^{s}(\omega) \int_0^{\pi} \sin\gamma P_n^m(\cos\gamma)\, \Lambda_1^{(j-s)} h_k(\omega\rho)\, P_k^m(\cos\gamma)\, d\gamma \right]_{\rho=1}. \tag{27}$$

Здесь $\varkappa_{kmn} = N_{mn} q_{mk}/q_{mn}$.

Применив к формулам (23) — (25) обратное преобразование Фурье, давление в нестационарном эхо-сигнале представим формулой

$$p_e(r, \theta, \varphi, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j p_e^j(r, \theta, \varphi, \tau), \tag{28}$$

где

$$p_e^j(r, \theta, \varphi, \tau) = p_0 \int_0^{\tau_0} F(\xi)\, G_j(\tau - \xi)\, d\xi, \quad G_j(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_j(\omega)\, e^{-i\omega\tau} d\omega. \tag{29}$$

В случае, когда функция $f(\zeta)$ (см. формулу (13)), определяющая форму поверхностей упругого тела, имеет вид

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \zeta^{-n} \qquad (N \text{ — целое, } \alpha_n = \mathrm{const}), \tag{30}$$

выражения для x_{mn}^j представляются в виде конечных рядов.

Таким образом, с помощью метода возмущения формы границы получено решение задачи гидроакустики для упругого тела вращения, форма которого мало отличается от сферической, давление в эхо-сигнале найдено в виде ряда по степеням малого параметра ε и представлено формулами (25), (28), (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь О. М.* Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—611.
2. *Немиш Ю. Н.* Рекуррентные соотношения метода возмущения в пространственных задачах теории упругости.— Прикл. механика, 1973, 9, № 9, с. 64—70.
3. *Эхо-сигналы* от упругих объектов. Т. 2. Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1974. 346 с. Авт.: *У. К. Нигул, Я. А. Метсавээр, Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер.*
4. *Hickling R.* Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water.— J. Acoust. Soc. Amer., 1964, 36, N 4, p. 1124—1137.

Львовский государственный университет
Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.IX 1976 г.