

М. Ф. Стасюк

**О ВЛИЯНИИ ЖЕСТКОСТИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ  
НА ОБЛАСТЬ ДОСТОВЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ КОНСОЛИ**

Рассмотрим задачу об устойчивости прямолинейной формы равновесия упруго защемленной упругой консоли с разнесенными массами на свободном конце при действии консервативной и следящей сил. Пренебрегая распределенной массой стержня по сравнению с концевыми массами, исследуем влияние жесткости закрепления на область достоверной устойчивости [1] соответствующей системы с двумя степенями свободы. При этом уравнения малых ее колебаний получим путем, отличным от применяемых обычно.

Исходим из известной краевой задачи, описывающей малые колебания рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \gamma^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ [u(x, t)]_{x=0} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \psi \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right]_{x=0} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right]_{x=1} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma^2 (1 - \eta) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=1} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\gamma^2 = \frac{G+H}{EJ} l^2$ ;  $\eta = \frac{H}{G+H}$ ;  $a = \rho^2 \mu \frac{l}{EJ}$ ;  $b = \mu \frac{l^3}{EJ}$ ;  $G, H$  — консервативная и следящая силы соответственно, приложенные к свободному концу;  $\mu$  — величина разнесенных масс;  $2\rho$  — расстояние между ними;  $EJ$  — изгибная жесткость стержня;  $l$  — его длина;  $\psi$  — параметр жесткости закрепления.

Задача (1) допускает разделение переменных. Поэтому ее решение может быть представлено в виде

$$u(x, t) = e^{\lambda t} y(x),$$

где  $y(x)$  определяется следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} y^{IV}(x) + \gamma^2 y''(x) &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) - \psi y''(0) &= 0, \\ y''(1) + a \lambda^2 y'(1) &= 0, \\ y'''(1) + \gamma^2 (1 - \eta) y'(1) - b \lambda^2 y(1) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения из (2) выбираем в виде [2]

$$y(x) = c_0 \psi + c_1 \varphi' + c_2 \varphi'' + c_3 \varphi''',$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\gamma^2} \left( x - \frac{\sin \gamma x}{\gamma} \right).$$

Из первых двух краевых условий задачи (2) (или, что то же, задачи (1)) имеем  $c_3 = 0$ ,  $c_2 = \psi c_1$ .

В качестве обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  рассматриваемой системы принимаем, как обычно, перемещение и угол поворота свободного конца стержня:

$$q_1 = [u(x, t)]_{x=1}, \quad q_2 = \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_{x=1}. \quad (3)$$

При этом два других крайевых условия можно переписать так:

$$\begin{aligned} a\ddot{q}_2 + e^{\lambda t} [c_0 \varphi'''(x) + c_1 (\varphi''(x) + \psi \varphi'''(x))]_{x=1} &= 0, \\ -b\ddot{q}_1 + e^{\lambda t} [c_0 \varphi'''(x) + c_1 (\varphi''(x) + \psi \varphi'''(x))]_{x=1} + \gamma^2 (1 - \eta) q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражая теперь коэффициенты  $c_0$  и  $c_1$  через обобщенные координаты (3), из (4) получаем уравнения малых колебаний рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} b\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

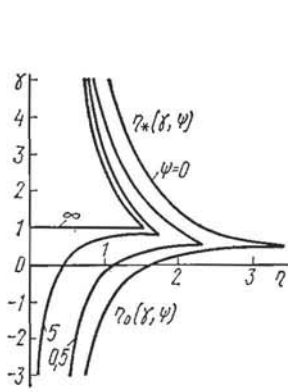


Рис. 1

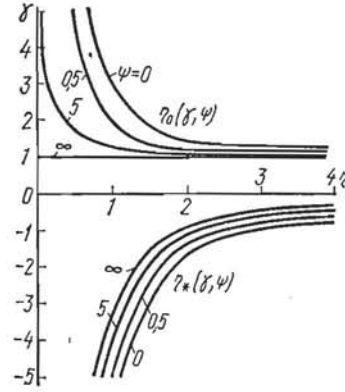


Рис. 2

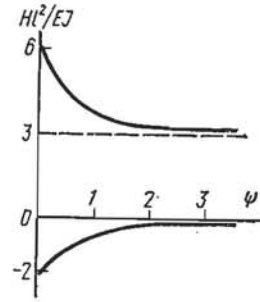


Рис. 3

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= \left[ \frac{F_2(x) + \psi F_2''(x)}{F_4(x) + \psi F_4'(x)} \right]_{x=1}; & c_{12} &= - \left[ \frac{F_2(x) + \psi F_2''(x) - \eta \gamma^2 (F_4(x) + \psi F_4'(x))}{F_4(x) + \psi F_4'(x)} \right]_{x=1}; \\ c_{21} &= - \left[ \frac{F_2(x) + \psi F_2''(x)}{F_4(x) + \psi F_4'(x)} \right]_{x=1}; & c_{22} &= \left[ \frac{F_4(x) + \psi F_4''(x)}{F_4(x) + \psi F_4'(x)} \right]_{x=1}; \\ F_{2s} &= [\varphi^{3-s}]^2 - \varphi^{2-s} \varphi^{4-s} \quad (s = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Отметим, что при  $\psi = 0$  (жесткое закрепление) уравнения (5) совпадают с известными [1].

Используя полученные выражения для коэффициентов  $c_{ij}$ , как и в работе [1], приходим к следующим двум уравнениям для определения статической и динамической критических соответственно:

$$\begin{aligned} \eta_0(\gamma, \psi) &= - \left\{ \frac{F_0(x) - \gamma^2 F_2(x) + \psi [F_0(x) - \gamma^2 F_2(x)]}{F_2(x) + \psi F_2'(x)} \right\}_{x=1}, \\ \eta_*(\gamma, \psi) &= \left\{ \frac{[F_2(x) + \psi F_2''(x)]^2}{\gamma^2 [F_2(x) F_4(x) + \psi (F_2(x) F_4(x))' + \psi^2 F_2'(x) F_4'(x)]} \right\}_{x=1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Построенные согласно (6) области достоверной устойчивости при различных значениях параметра  $\psi$  в плоскости параметров  $(\eta, \gamma)$  изображены на рис. 1—3. Эти рисунки соответствуют, как и в работе [1], следующим трем случаям: а) в исследуемом состоянии равновесия стержень сжат, б) растянут, в) не нагружен. Как видим, ослабление жесткости заделки приводит здесь во всех случаях к уменьшению области достоверной устойчивости рассматриваемой системы (в отличие, например, от установленной в работе [3] немонотонной зависимости критической силы от параметра  $\psi$ ).

Отметим, что при рассмотрении случая «б» следует перейти в формулах (6) от тригонометрических функций к функциям гиперболическим, а в слу-

чае «в» — к пределу при  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$  и  $\gamma^2 \eta = \frac{Hl^2}{EJ}$ . При этом наилучшее значение разности масс нетрудно определить из известной формулы  $a_*(\gamma, \psi) = \frac{c_{22}}{c_{11}} \Big|_{\eta=\eta_*(\gamma, \psi)}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зорий Л. М. К устойчивости равновесия неконсервативных систем.— *Вопр. механики реал. твердого тела*, 1964, вып. 3, с. 113—119.
2. Зорий Л. М. Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами.— *Допов. АН УРСР*, 1968, № 12, с. 1072—1075.
3. Зорий Л. М., Ли-Гюн-ы. Устойчивость консольного стержня с резервуаром при действии следящей и консервативной сил.— *Сопротивление материалов и теория сооружений*, 1971, вып. 14, с. 31—36.

Вычислительный центр Львовского  
филиала математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
10.12.77