

контуре квадратного отверстия  $L$  задана плотность теплового потока, изменяющаяся по закону

$$q_n|_L = Q(s) = q_0 x. \quad (45)$$

В рассматриваемом случае  $N = 3$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = \bar{C}_3$ ,  $R = \bar{R}$ ,  $K_{12} = 0$ ,  $\alpha_6 = 0$ ,  $\mu_j = i\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). При положительном значении  $C_3$  вершины квадрата лежат на осях  $x$  и  $y$ , а при отрицательном — стороны квадрата параллельны осям координат.

Вычисления произведены для пластинки, изготовленной из стекло-текстолита КАСТ-В со следующими упругими и теплофизическими характеристиками:  $\frac{E_1}{E_2} = 1,45$ ;  $\frac{E_1}{G} = 6$ ;  $\nu_1 = 0,17$ ;  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0,8$ ;  $\frac{K_{22}}{K_{11}} = 0,6$ . На рис. 2 приведены графики распределения напряжений  $\sigma_\theta$  (в долях  $\frac{q_0 E_1 \alpha_1 R^2}{K_{11}}$ ) вдоль контура квадратного отверстия с закругленными углами ( $C_3 = \mp 1/9$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964. 487 с.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957. 463 с.
3. Мартынович Т. Л. Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 2, с. 64—69.
4. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А., Махмуд Аллам. Температурные напряжения около эллиптического отверстия в анизотропной пластинке. — Прикл. механика, 1974, 10, № 1, с. 72—78.
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1954. 444 с.
6. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск, Изд-во Белорус. ун-та, 1972. 198 с.
7. Уздалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1967. 166 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию  
12.10.77

УДК 539.377

**А. Н. Кулик, М. И. Микитин**

#### КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ, НАГРЕВАЕМОЙ ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЕЙНЫМ ПОДВИЖНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрим тонкую изотропную полубесконечную пластинку толщиной  $2\delta$ , по боковой поверхности  $z = +\delta$  которой на расстоянии  $x = d$  параллельно свободному краю движется с постоянной скоростью  $v$  линейный источник тепла длиной  $l$  и удельной мощностью  $q_0$  (рис. 1). Температуры сред  $t_c^\pm$ , омывающих боковые поверхности  $z = \pm \delta$  пластинки, положим равными нулю. Для определения неустановившегося температурного поля имеем уравнения теплопроводности<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \Delta T - C \frac{\partial T}{\partial \tau} - \alpha_+ T - \alpha_- T^* &= -Q\delta(x-d), \\ \Delta T^* - C \frac{\partial T^*}{\partial \tau} - 12 \left( \frac{\alpha_+}{4} + \frac{1}{r} \right) T^* - 3\alpha_- T &= -3Q\delta(x-d) \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. Киев, 1972.

и краевые условия

$$\begin{aligned} \{T, T^*\}_{\tau=0} = 0, \quad \{T, T^*\}_{x \rightarrow \infty} = 0, \\ \left\{ \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T^*}{\partial x} \right\}_{x=0} = 0, \quad \left\{ T, T^*, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T^*}{\partial y} \right\}_{|y| \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\Lambda = 2\delta\lambda$ ,  $C = 2\delta c_v$  — приведенные коэффициенты теплопроводности и теплоемкости пластинки;  $\tau$  — время;  $r = \frac{2\delta}{\lambda}$  — внутреннее термосопротивление пластинки;  $\alpha^\pm$  — коэффициенты теплоотдачи с боковых поверхностей  $z = \pm \delta$  пластинки;  $\delta(\xi)$  — дельта-функция Дирака;  $a^*$ ,  $b^*$  — ординаты концов источника тепла;

$$Q = q_0 \{S_- [y - (a^* + v\tau)] - S_+ [y - (b^* + v\tau)]\}; \quad \alpha_\pm = \alpha^+ \pm \alpha^-;$$

$$S_+(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0; \end{cases} \quad S_-(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0; \end{cases} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Вводя в рассмотрение функции  $\varphi_k = T + \mu_k T^*$  ( $k = 1, 2$ ), систему (1) приводим к двум разрешающим уравнениям

$$\Delta \varphi_k - \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau} - \kappa_k^2 \varphi_k = -Q_k \delta(x-d), \quad (3)$$

где

$$Q_k = \frac{Q}{\Lambda} (1 + 3\mu_k); \quad \kappa_k^2 = \frac{\alpha_+ + 3\mu_k \alpha_-}{\Lambda};$$

$$\mu_k = \frac{1}{3\alpha_-} \left[ \alpha_+ + \frac{6}{r} + (-1)^k \sqrt{\left( \alpha_+ + \frac{6}{r} \right)^2 + 3\alpha_-^2} \right]$$

$$(k = 1, 2); \quad a = \Lambda/C.$$

Применяя интегральные преобразования Фурье по  $y$  и Лапласа по  $\tau$ , получаем

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} - \gamma_k^2 \varphi_k - b_k \frac{\delta(x-d)}{s - i\eta v} \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь  $\gamma_k^2 = \eta^2 + \kappa_k^2 + \frac{s}{a}$ ;  $q_k = \frac{q_0}{\Lambda} (1 + 3\mu_k)$ ;

$$b_k = \sqrt{2\pi} q_k \delta_+(\eta) (e^{i\eta b^*} - e^{i\eta a^*}) \quad (k = 1, 2);$$

$$\delta_+(\eta) = \frac{1}{2} \left[ \delta(\eta) - \frac{1}{\pi i \eta} \right], \quad i = \sqrt{-1}.$$

Решая уравнения (4) с учетом трансформированных условий (2), находим трансформанты интегральных характеристик температуры

$$\bar{T} = \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)(s - i\eta v)} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{\beta_k b_k}{2\gamma_k} (e^{-\gamma_k(x+d)} - e^{-\gamma_k|x-d|}), \quad (5)$$

$$\bar{T}^* = \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)(s - i\eta v)} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{b_k}{2\gamma_k} (e^{-\gamma_k(x+d)} + e^{-\gamma_k|x-d|}),$$

$$\beta_k = \mu_{3-k} \quad (k = 1, 2).$$

Переходя в формулах (5) к оригиналам, находим

$$T = \frac{ia}{4\pi(\mu_1 - \mu_2)} \int_0^\tau M(\tau_0) \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{k+1} \psi_{2k+j}(\tau_0, z) d\tau_0, \quad (6)$$

$$T^* = \frac{ia}{4\pi(\mu_1 - \mu_2)} \int_0^\tau N(\tau_0) \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{k+1} \psi_{2k+j}(\tau_0, z) d\tau_0,$$

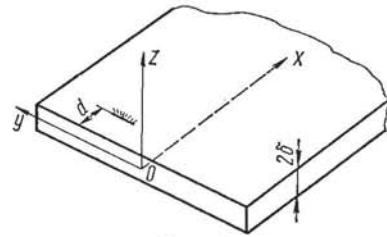


Рис. 1

$$\text{где } M(\tau_0) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \beta_k q_k e^{-\alpha_k^2 \tau_0}; \quad N(\tau_0) = \sum_{k=1}^2 (-1)^k q_k e^{-\alpha_k^2 \tau_0};$$

$$\psi_k(\tau_0, z) = \frac{\bar{z}_k - z_k}{2\alpha\tau_0} e^{-\frac{z_k^2 \bar{z}_k}{4\alpha\tau_0}}; \quad y_1 = y - v\tau_0 - b^*; \quad y_2 = y - v\tau_0 - a^*;$$

$$z_1 = x + iy_1; \quad z_2 = x + iy_2; \quad z_{3,4} = z_1 \pm d; \quad z_{5,6} = z_2 \pm d.$$

Температурные напряжения определим по формулам

$$\sigma_{xx}^\Sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{xx}^*, \quad \sigma_{yy}^\Sigma = \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^*, \quad \sigma_{xy}^\Sigma = \sigma_{xy} + \sigma_{xy}^*, \quad (7)$$

где

$$\sigma_{xx} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} (U - \Phi); \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U - \Phi); \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (U - \Phi); \quad (8)$$

$$\sigma_{xx}^* = -\frac{zE}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\alpha_t}{\delta} (1 + \nu) T^* \right];$$

$$\sigma_{yy}^* = -\frac{zE}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\alpha_t}{\delta} (1 + \nu) T^* \right]; \quad (9)$$

$$\sigma_{xy}^* = -\frac{zE}{1+\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y};$$

$E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha_t$  — температурный коэффициент линейного расширения. Функция  $U$  — общее решение уравнения  $\Delta U = 0$ , а  $\Phi$  — частное решение уравнения  $\Delta \Phi = \alpha_t E T$ . Функция прогиба  $\omega$  удовлетворяет уравнению  $\Delta \omega = -\frac{\alpha_t}{\delta} (1 + \nu) T^*$ .

Если край  $x = 0$  пластинки свободен от внешней нагрузки, то

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (U - \Phi)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (U - \Phi)|_{x=0} = 0, \quad (10)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\alpha_t}{\delta} (1 + \nu) T^* \right]_{x=0} = 0, \quad (11)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\alpha_t}{\delta} (1 + \nu) \frac{\partial T^*}{\partial x} \right]_{x=0} = 0.$$

С помощью интегральных преобразований Фурье — Лапласа для трансформант искомых напряжений получаем формулы

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\alpha_t E}{\mu_1 - \mu_2} \frac{1}{s - i\eta\nu} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\beta_k b_k}{\gamma_k^2 - \eta^2} \left\{ (1 - x|\eta|) \frac{\eta^2}{\gamma_k} e^{-\gamma_k d - x|\eta|} - \right. \\ \left. - \eta^2 x e^{-|\eta|(x+d)} - \frac{|\eta|}{2} (e^{-|\eta|(x+d)} - e^{-|\eta||x-d|}) - \frac{\eta^2}{2\gamma_k} (e^{-\gamma_k(x+d)} + e^{-\gamma_k|x-d|}) \right\},$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{\alpha_t E}{\mu_1 - \mu_2} \frac{1}{s - i\eta\nu} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\beta_k b_k}{\gamma_k^2 - \eta^2} \left\{ (1 - x|\eta|) \frac{\eta^2}{\gamma_k} e^{-\gamma_k d - x|\eta|} + \right. \\ \left. + \left( x\eta^2 - \frac{3}{2} |\eta| \right) e^{-|\eta|(x+d)} + \frac{\gamma_k}{2} (e^{-\gamma_k(x+d)} + e^{-\gamma_k|x-d|}) \right\}, \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{\alpha_t E}{\mu_1 - \mu_2} \frac{i\eta}{s - i\eta\nu} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\beta_k b_k}{\gamma_k^2 - \eta^2} \left\{ e^{-|\eta|(x+d)} - e^{-\gamma_k(x+d)} - \right. \\ \left. - \text{sign}(x - d) (e^{-\gamma_k|x-d|} - e^{-|\eta||x-d|}) - 2x \left( \frac{\eta^2}{\gamma_k} e^{-\gamma_k d - |\eta|x} + |\eta| e^{-|\eta|(x+d)} \right) \right\},$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^* = \frac{z\alpha_t E}{\delta(\mu_1 - \mu_2)} \frac{1}{s - i\eta\nu} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{b_k}{\gamma_k^2 - \eta^2} \left[ \left( 1 - x|\eta| \frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \left( \frac{\eta^2}{\gamma_k} e^{-\gamma_k d - |\eta|x} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{|\eta|}{2} e^{-|\eta|(x+d)} \right) + \frac{|\eta|}{2} e^{-|\eta||x-d|} - \frac{\eta^2}{2\gamma_k} (e^{-\gamma_k(x+d)} + e^{-\gamma_k|x-d|}) \right],$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yy}^* &= \frac{z\alpha_l E}{\delta(\mu_1 - \mu_2)} \frac{1}{s - i\eta\nu} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{b_k}{\gamma_k^2 - \eta^2} \left\{ \frac{|\eta|}{2(3+\nu)} e^{-|\eta|(x+d)} \times \right. \\ &\times (1 + 3\nu + (1-\nu)x|\eta|) + \frac{1-\nu}{3+\nu} (1-x|\eta|) \frac{\eta^2}{\gamma_k} e^{-\gamma_k d - |\eta|x} - \\ &\left. - \frac{\gamma_k}{2} (e^{-\gamma_k(x+d)} - e^{-\gamma_k|x-d|}) + \frac{|\eta|}{2} e^{-|\eta||x-d|} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy}^* &= \frac{iz\alpha_l E}{\delta(\mu_1 - \mu_2)} \frac{1}{s - i\eta\nu} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{b_k}{b_k^2 - \eta^2} \left\{ \frac{|\eta|\eta}{(3+\nu)\gamma_k} (2\nu + (1-\nu)x|\eta|) \times \right. \\ &\times e^{-\gamma_k d - |\eta|x} + \frac{1-\nu}{3+\nu} (1-2x|\eta|) \frac{\eta}{2} e^{-|\eta|(x+d)} + \frac{\eta}{2} e^{-\gamma_k(x+d)} + \\ &\left. + \text{sign}(x-d) \frac{\eta}{2} (e^{-\gamma_k|x-d|} - e^{-|\eta||x-d|}) \right\}. \end{aligned}$$

Переходя в (12), (13) к оригиналам, находим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\alpha_l E}{\mu_1 - \mu_2} \frac{ia}{4\pi} \int_0^{\tau} M(\tau_0) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ R_k(\tau_0, z) - R_k(\tau_0, \bar{z}) - \right. \\ &- x [F_k(\tau_0, z) - F_k(\tau_0, \bar{z}) + S_k(\tau_0, \bar{z}) - S_k(\tau_0, z)] + 2x \left( \frac{1}{z_{2k+1}^2} - \frac{1}{\bar{z}_{2k+1}^2} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^2 P_{2k+j}^-(\tau_0, z) + \left( 1 + \text{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}} \right) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} - \frac{1}{\bar{z}_{2k+j}^2} \right) + \\ &\left. + \left( 2 + \text{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}} - \frac{x}{\pi\sqrt{a\tau_0}} e^{-\frac{d^2}{4a\tau_0}} \right) \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} - \frac{1}{\bar{z}_{2k+j}^2} \right) \right\} d\tau_0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{\alpha_l E}{\mu_1 - \mu_2} \frac{ia}{4\pi} \int_0^{\tau} M(\tau_0) \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left\{ x \left[ \frac{2}{z_{2k+1}^2} - \frac{2}{\bar{z}_{2k+1}^2} + \right. \right. \\ &+ \left( 1 + \text{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}} \right) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} - \frac{1}{\bar{z}_{2k+j}^2} \right) + \frac{1}{\pi\sqrt{a\tau_0}} e^{-\frac{d^2}{4a\tau_0}} \times \\ &\times \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{\bar{z}_{2k+j}^2} - \frac{1}{z_{2k+j}^2} \right) + S_k(\tau_0, z) - S_k(\tau_0, \bar{z}) + F_k(\tau_0, z) - F_k(\tau_0, \bar{z}) \left. \right] - \\ &- \sum_{j=1}^2 \left( \frac{3^{2-k}}{z_{2k+j}^2} - \frac{3^{2-k}}{\bar{z}_{2k+j}^2} \right) + \left( 1 + \text{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}} \right) \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\bar{z}_{2k+j}^2} \right) + R_k(\tau_0, z) - R_k(\tau_0, \bar{z}) + \sum_{j=1}^2 (\psi_{2k+j}(\tau_0, z) + P_{2k+j}^-(\tau_0, z)) \left. \right\} d\tau_0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{\alpha_l E}{\mu_1 - \mu_2} \frac{a}{4\pi} \int_0^{\tau} M(\tau_0) \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 P_{2k+j}^+(\tau_0, z) - x \left[ S_k(\tau_0, z) + \right. \right. \\ &+ S_k(\tau_0, \bar{z}) - F_k(\tau_0, z) - F_k(\tau_0, \bar{z}) - \frac{1}{z_{2k+1}^2} - \frac{1}{\bar{z}_{2k+1}^2} - \left( 1 + \text{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}} \right) \times \\ &\times \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} + \frac{1}{\bar{z}_{2k+j}^2} \right) \left. \right] - \\ &\left. - \left( 1 + \frac{x}{\pi\sqrt{a\tau_0}} e^{-\frac{d^2}{4a\tau_0}} \right) \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} + \frac{1}{\bar{z}_{2k+j}^2} \right) \right\} d\tau_0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma_{xx}^* = \frac{z\alpha_1 E}{\delta(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{ia}{4\pi} \int_0^\tau N(\tau_0) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ \frac{1-v}{3+v} x \left[ \frac{2}{z_{2k+1}^2} - \frac{2}{z_{2k+1}^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(1 + \operatorname{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}}\right) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} - \frac{1}{z_{2k+j}^2} \right) + S_k(\tau_0, z) + S_k(\tau_0, \bar{z}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - F_k(\tau_0, z) + F_k(\tau_0, \bar{z}) + \frac{1}{\pi\sqrt{a\tau_0}} e^{-\frac{d^2}{4a\tau_0}} \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{z_{2k+j}} - \frac{1}{z_{2k+j}} \right) \right] \right\} + (17)$$

$$+ R_k(\tau_0, z) - R_k(\tau_0, \bar{z}) + \left(2 + \operatorname{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}}\right) \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left( \frac{1}{z_{2k+j}} - \frac{1}{z_{2k+j}} \right) \Bigg\} d\tau_0,$$

$$\sigma_{yy}^* = \frac{z\alpha_1 E}{\delta(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{ia}{4\pi} \int_0^\tau N(\tau_0) \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left\{ \frac{1+3v}{3+v} \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{z_{2k+j}} - \frac{1}{z_{2k+j}} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} (P_{2k+j}^-(\tau_0, z) + \psi_{2k+j}(\tau_0, z)) + \frac{1-v}{3+v} \left[ \left(1 + \operatorname{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}}\right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left( \frac{1}{z_{2k+j}} - \frac{1}{z_{2k+j}} \right) + R_k(\tau_0, z) - R_k(\tau_0, \bar{z}) + x \left[ \frac{1}{z_{2k+1}^2} - \frac{1}{z_{2k+1}^2} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(1 + \operatorname{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}}\right) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} - \frac{1}{z_{2k+j}^2} \right) + S_k(\tau_0, z) - S_k(\tau_0, \bar{z}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + F_k(\tau_0, z) - F_k(\tau_0, \bar{z}) + \frac{1}{\pi\sqrt{a\tau_0}} e^{-\frac{d^2}{4a\tau_0}} \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{z_{2k+j}} - \frac{1}{z_{2k+j}} \right) \right] \right] \Bigg\} d\tau_0, (18)$$

$$\sigma_{xy}^* = \frac{z\alpha_1 E}{\delta(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{a}{4\pi} \int_0^\tau N(\tau_0) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ \frac{2v}{3+v} \left[ \left(1 + \operatorname{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}}\right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left( \frac{1}{z_{2k+j}} + \frac{1}{z_{2k+j}} \right) + R_k(\tau_0, z) + R_k(\tau_0, \bar{z}) \right] - \right.$$

$$\left. \left. - x \frac{1-v}{3+v} \left[ \left(1 + \operatorname{erf} \frac{d}{2\sqrt{a\tau_0}}\right) \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{z_{2k+j}^2} + \frac{1}{z_{2k+j}^2} \right) - F_k(\tau_0, z) - F_k(\tau_0, \bar{z}) + S_k(\tau_0, z) + S_k(\tau_0, \bar{z}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{\pi\sqrt{a\tau_0}} e^{-\frac{d^2}{4a\tau_0}} \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{z_{2k+j}} + \frac{1}{z_{2k+j}} \right) - \frac{2}{z_{2k+1}^2} - \frac{2}{z_{2k+1}^2} \right] + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1-v}{3+v} \left( \frac{1}{z_{2k+1}} + \frac{1}{z_{2k+1}} \right) - \frac{1}{z_{2k+2}} - \frac{1}{z_{2k+2}} + \sum_{j=1}^2 P_{2k+j}^+(\tau_0, z) \right\} d\tau_0. (19)$$

Здесь

$$R_k(\tau_0, z) = \left( \frac{1}{z_{2k+1}} + \frac{1}{z_{2k+2}} \right) e^{\frac{z_{2k+1} z_{2k+2}}{4a\tau_0}} \operatorname{erfc} \frac{z_k}{2\sqrt{a\tau_0}};$$

$$S_k(\tau_0, z) = \frac{z_k}{2a\tau_0} R_k(\tau_0, z); \quad P_k^\pm(\tau_0, z) = \left( \frac{1}{z_k} \pm \frac{1}{z_k} \right) e^{-\frac{z_k^2}{2\sqrt{a\tau_0}}};$$

$$F_k(\tau_0, z) = \left( \frac{1}{z_{2k+1}^2} + \frac{1}{z_{2k+2}^2} \right) e^{\frac{z_{2k+1} z_{2k+2}}{4a\tau_0}} \operatorname{erfc} \frac{z_k}{2\sqrt{a\tau_0}};$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x); \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Положив в (6) и (14) — (19)  $q = q_0 l$  и перейдя к пределу при  $l \rightarrow 0$ , получим формулы для температурного поля и напряжений в случае нагрева полубесконечной пластинки точечным источником тепла мощностью  $q$ , движущимся по ее боковой поверхности.

Переходя в (15), (18) при  $x = 0$  к безразмерным переменным

$$Z = \frac{z}{\delta},$$

$$Y = \frac{y}{\delta}, \quad \sigma_y = \frac{2\pi\Lambda}{\alpha_1 E q} \sigma_{yy}, \quad \sigma_y^* = \frac{2\pi\Lambda}{\alpha_1 E q} \sigma_{yy}^*$$

и безразмерным параметрам

$$L = \frac{l}{\delta}, \quad D = \frac{d}{\delta}, \quad \text{Bi}_{\pm} = \frac{\alpha_{\pm} \delta}{\lambda}, \quad \text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2},$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \int_0^{\text{Fo}} \left\{ \frac{\mu_2(1+3\mu_1)}{\mu_1-\mu_2} e^{-t(\text{Bi}_+ + 3\mu_1 \text{Bi}_-)} - \frac{\mu_1(1+3\mu_2)}{\mu_1-\mu_2} e^{-t(\text{Bi}_+ + 3\mu_2 \text{Bi}_-)} \right\} \times \\ & \times \left[ \frac{Y-L}{D^2 + (Y-L)^2} \left( 1 - e^{-\frac{D^2 + (Y-L)^2}{4t}} \right) - \frac{Y}{D^2 + Y^2} \left( 1 - e^{-\frac{D^2 + Y^2}{4t}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{Y-L}{4t} e^{-\frac{D^2 + (Y-L)^2}{4t}} + \frac{Y}{4t} e^{-\frac{D^2 + Y^2}{4t}} \right] dt, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^* = & \int_0^{\text{Fo}} \left\{ \frac{1+3\mu_1}{\mu_1-\mu_2} e^{-t(\text{Bi}_+ + 3\mu_1 \text{Bi}_-)} - \frac{1+3\mu_2}{\mu_1-\mu_2} e^{-t(\text{Bi}_+ + 3\mu_2 \text{Bi}_-)} \right\} \times \\ & \times \left[ \frac{1+v}{3+v} \left[ \frac{Y-L}{D^2 + (Y-L)^2} \left( 1 - e^{-\frac{D^2 + (Y-L)^2}{4t}} \right) - \frac{Y}{D^2 + Y^2} \left( 1 - e^{-\frac{D^2 + Y^2}{4t}} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{Y-L}{4t} e^{-\frac{D^2 + (Y-L)^2}{4t}} + \frac{Y}{4t} e^{-\frac{D^2 + Y^2}{4t}} \right] dt. \end{aligned} \quad (21)$$

По формулам (20), (21), записанным для случая  $a^* = 0$ ,  $b^* = l$ ,  $v = 0$ , произведены расчеты безразмерных напряжений  $\sigma_y$ ,  $\sigma_y^*$ , некоторые результаты которых представлены в виде графиков на рис. 2—4. На графиках

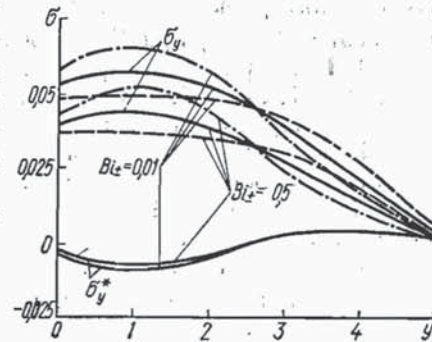


Рис. 2

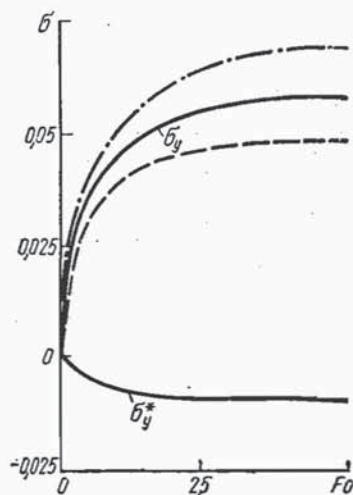


Рис. 3

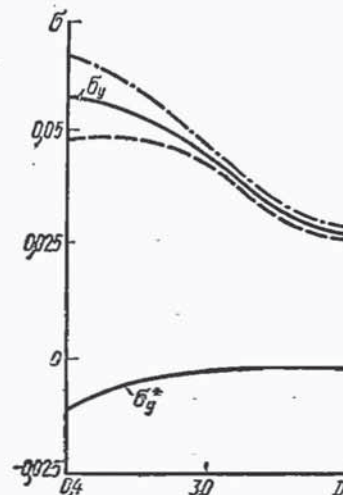


Рис. 4

штрихпунктирной линией показано изменение  $\sigma_y^z$  при  $Z = -1$ , сплошной — изменение  $\sigma_y^z = \sigma_y$  при  $Z = 0$  и  $\sigma_y^*$  при  $Z = +1$ , штриховой —  $\sigma_y^z$  при  $Z = +1$ . На рис. 2 изображена зависимость напряжений от  $Y$  при  $L = 2$ ,  $D = 1$ ,  $Fo = 4$ ,  $Bi_{\pm} = 0,01$ ,  $Bi_{\pm} = 0,5$ . На рис. 3 представлена зависимость напряжений от безразмерного времени  $Fo$  при  $Y = 1$ ,  $L = 2$ ,  $D = 1$ ,  $Bi_{\pm} = 0,01$ . Графики на рис. 4 показывают зависимость напряжений от удаления  $D$  источника тепла от края пластинки при  $Y = 1$ ,  $L = 2$ ,  $Fo = 4$ ,  $Bi_{\pm} = 0,01$ . При подсчетах принято  $\nu = 0,3$ .

При увеличении критерия теплоотдачи в 50 раз напряжения  $\sigma_y$  в срединной плоскости пластинки уменьшаются в 3,4 раза, а напряжения изгиба  $\sigma_y^*$  изменяются незначительно, т. е. теплоотдача с поверхностей пластинки мало влияет на напряжения изгиба, которые при возрастании  $D$  затухают быстрее напряжений в срединной плоскости.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 10.10.77

УДК 539.3

**А. М. Куземко, Н. И. Куземко**

**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ  
РЕШЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАДАЧ  
ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

Пусть полая оболочка произвольной формы и плана подвергнута действию некоторой нагрузки  $q = q(x, y)$  и температурного поля  $T = T(x, y, z)$ , равномерно распределенного по толщине и в срединной поверхности. Тогда напряженно-деформированное состояние оболочки описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений [3]

$$AU = V, \quad (1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \Delta\Delta & 0 \\ 0 & \Delta\Delta \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} W \\ \Phi \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix};$$

$$V_1 = -E \left( \frac{1}{2} L(W, W) + \Delta_k W + \alpha \Delta T_N \right);$$

$$V_2 = \frac{q}{D} + \frac{h}{D} \left( L(\Phi, W) + \Delta_k \Phi - E \frac{\alpha h}{1-\nu} \Delta T_M \right);$$

$$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x^2} k_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} k_x;$$

$$L(W, \Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

$$T_N = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z) dz; \quad T_M = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} z T(x, y, z) dz;$$

$W(x, y)$  — функция прогибов;  $\Phi(x, y)$  — функция напряжений;  $k_x, k_y$  — главные кривизны;  $h$  — толщина оболочки;  $D$  — цилиндрическая жесткость.

Система (1) вместе с граничными условиями

$$L(U)|_s = 0, \quad (2)$$

где  $L$  — дифференциальный оператор граничных условий, полностью определяет напряженно-деформированное состояние оболочки. Температурное