

оказывает толщина слоя жидкости между оболочкой и жесткой цилиндрической стенкой, причем ее увеличение ведет к возрастанию всех исследуемых частот. Для первой частоты этот результат был получен в работе [1]. Влияние продольной инерции $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ на низшие частоты значительно, а влияние инерции вращения $\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2}$ — несущественно, что согласуется с результатами работы [6], полученными для изотропного цилиндрического бака, заполненного жидкостью.

В последних строках табл. 3 показано влияние безразмерной плотности жидкости $\frac{\rho_0}{\rho_1}$, относительной толщины оболочки $k_0 = \frac{2h}{R_1}$, коэффициента Пуассона ν_{21} и величины отношения модулей $\frac{E_1}{G_{13}}$, $m = \frac{E_2}{E_1}$ ортотропного материала. Существенное влияние оказывают параметры k_0 , m , возрастание которых ведет к увеличению собственных частот. Относительная плотность $\frac{\rho_0}{\rho_1}$ заметно изменяет только первую частоту. К аналогичным выводам пришли авторы работы [8], в которой исследовалось влияние толщины изотропной оболочки на первую собственную частоту.

Полученные результаты могут быть расширены для оболочки, частично заполненной ($R_2 < R_1$) либо частично окруженной жидкостью ($R_2 > R_1$), поскольку несмоченная часть оболочки не оказывает существенного влияния на колебания системы [2, 3, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г. Е. Колебания коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью.— Изв. АН АрмССР Механика, 1968, 21, № 4, с. 40—47.
2. Балакирев Ю. Г. Осесимметричные колебания соосных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью.— В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М., 1970, с. 81—87.
3. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев, Наук. думка, 1964. 104 с.
4. Мнев Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. Л., Судостроение, 1970. 365 с.
5. Швец Р. Н., Марчук Р. А. Собственные колебания ортотропной цилиндрической оболочки, соприкасающейся с жидкостью.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 63—67.
6. Шкалярчук Ф. Н. О влиянии сжимаемости жидкости при продольных колебаниях цилиндрического бака.— В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск, 1973, с. 291—313.
7. Шапов В. П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1, с. 170—173.
8. Bauer H. F., Teh-Min Hsu, J. Tin-Shun Wang. Interaction of a sloshing liquid with elastic containers.— Trans. ASME. D, 1968, 3, p. 55—60.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 01.09.77

УДК 539.377

Т. Л. Мартынович, С. И. Кибальникова

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ ПРИ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОвого ПОТОКА НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим плоскую задачу стационарной термоупругости для однородного анизотропного тела с некруговой цилиндрической полостью, подверженного тепловому воздействию. Тело обладает прямолинейной анизотропией относительно упругих и тепловых свойств и отнесено к прямо-

угольной системе координат $Oxyz$. Координатная плоскость xOy совмещена с поперечным нормальным сечением длинного призматического тела или со срединной плоскостью тонкой пластинки с теплоизолированными основаниями. Внешняя граница призматического тела может быть свободной или неподвижно закрепленной.

Пусть нормальное поперечное сечение призматического тела занимает область S с отверстием, ограниченным простым замкнутым контуром L , который описывается уравнением

$$x + iy = R \left(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^N C_k e^{-ik\theta} \right) \left(\sum_{k=1}^N k |C_k|^2 < 1 \right). \quad (1)$$

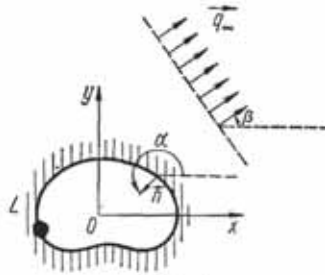


Рис. 1

При аналитическом решении задачи область S будем рассматривать бесконечной (возмущение термоупругого состояния тела, обусловленное наличием полости, не достигает его внешней границы). На контуре отверстия (цилиндрической поверхности полости) L задан тепловой поток плотности $Q(s)$, а на внешней границе тела, удаленной в бесконечность, задан однородный тепловой

поток интенсивности q_∞ , направленный под углом β к оси x (рис. 1). Внешние силовые воздействия отсутствуют.

Определение стационарного температурного поля сводится к интегрированию уравнения [1, 7]

$$K_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + K_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

при граничных условиях

$$q_n|_L = Q(s), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = d_1, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = d_2 \quad \text{при } |x|, |y| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Здесь

$$d_1 = \frac{q_\infty (K_{12} \sin \beta - K_{22} \cos \beta)}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}; \quad d_2 = \frac{q_\infty (K_{12} \cos \beta - K_{11} \sin \beta)}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2};$$

K_{ij} — коэффициенты теплопроводности; q_n — поток тепла через единичную площадку поверхности L в направлении внешней нормали n ; T — температура среды. Общее решение уравнения (2) выражается через аналитическую функцию $\Phi_3(z_3)$ переменного $z_3 = x + \mu_3 y$ по формуле [6, 7]

$$T = 2 \operatorname{Re} \Phi_3(z_3), \quad (4)$$

причем

$$\mu_3 = \frac{-K_{12} + iK}{K_{22}}, \quad K = \sqrt{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \quad (K_{11}K_{22} - K_{12}^2 > 0).$$

Аналитическая функция $\Phi_3(z_3)$ определяется из граничных условий (3), которые преобразуем к виду

$$iK d[\Phi_3(z_3) - \overline{\Phi_3(z_3)}] = Q(s) ds \quad \text{на } L, \quad (5)$$

$$\lim_{|z_3| \rightarrow \infty} \Phi_3'(z_3) = B_3^\infty, \quad B_3^\infty = -\frac{q_\infty}{2} \left(\frac{\cos \beta}{K_{11}} - i \frac{\sin \beta}{K} \right). \quad (6)$$

Граничное условие (5) представим в виде интегрального соотношения

$$K \int_L F(t) d[\Phi_3(t_3) - \overline{\Phi_3(t_3)}] = - \int_L F(t) Q(t) e^{-i\alpha} dt, \quad (7)$$

где $F(t)$ — граничное значение произвольной функции $F(z)$ переменной $z = x + iy$, голоморфной в области S ; α — угол между внешней нормалью к контуру L и осью x .

После того как функция $\Phi_3(z_3)$, удовлетворяющая граничным условиям (6), (7), определена, комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j) = \varphi_j'(z_j)$ ($j = 1, 2$), описывающие термоупругое состояние анизотропного тела, находим из граничных условий, которые в интегральной форме имеют вид [4]

$$\int_L F(t) dU = -r(1 + i\mu_3) \int_L F(t) \Phi_3(t_3) dt_3 - \bar{r}(1 + i\bar{\mu}_3) \int_L F(t) \overline{\Phi_3(t_3)} d\bar{t}_3, \quad (8)$$

$$\int_L \overline{F(t)} dU = -r(1 + i\mu_3) \int_L \overline{F(t)} \Phi_3(t_3) dt_3 - \bar{r}(1 + i\bar{\mu}_3) \int_L \overline{F(t)} \overline{\Phi_3(t_3)} d\bar{t}_3.$$

Здесь [3, 7]

$$U = \sum_{j=1}^2 [(1 + i\mu_j) \Phi_j(z_j) + (1 + i\bar{\mu}_j) \overline{\Phi_j(z_j)}]; \quad (9)$$

$$r = \frac{\alpha_1 \mu_3 - \alpha_2 \mu_3^2 - \alpha_2}{a_{11} (\mu_3 - \mu_1) (\mu_3 - \mu_2) (\mu_3 - \bar{\mu}_1) (\mu_3 - \bar{\mu}_2)};$$

α_j — температурные коэффициенты линейной и угловой деформаций; t — аффикс точки контура L ; $z_j = x + \mu_j y$ ($j = 1, 2, 3$) — обобщенные комплексные переменные, изменяющиеся в областях S_j , получаемых из области S соответствующими аффинными преобразованиями; $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ — корни соответствующих характеристических уравнений [2, 3].

Контур отверстия областей S_j переменных $z_j = x + \mu_j y$ обозначим через L_j , а аффиксы их точек — через t_j ($j = 1, 2, 3$). Аффиксы точек контуров L_j и L находятся между собой в аффинном соответствии:

$$t_j = \frac{1 - i\mu_j}{2} t + \frac{1 + i\mu_j}{2} \bar{t} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Аналитические функции $\Phi_j(z_j)$ ($j = 1, 2, 3$) должны удовлетворять условиям однозначности смещений, которые можно преобразовать к виду

$$\int_{L_j} \Phi_j(t_j) dt_j = D_j^{(1)} \int_{L_3} \Phi_3(t_3) dt_3 + D_j^{(2)} \int_{L_3} \overline{\Phi_3(t_3)} d\bar{t}_3 \quad (j = 1, 2). \quad (11)$$

Величины $D_j^{(k)}$ выражаются через упругие и теплофизические характеристики материала. Для ортотропного (относительно упругих и тепловых свойств) материала они даются формулами

$$D_j^{(1)} = (-1)^j \frac{E_1 (\alpha_1 \beta_j^2 - \alpha_2)}{2\beta_j (\beta_3 - \beta_j) (\beta_1^2 - \beta_2^2)}, \quad D_j^{(2)} = (-1)^{j+1} \frac{E_1 (\alpha_1 \beta_j^2 - \alpha_2)}{2\beta_j (\beta_3 + \beta_j) (\beta_1^2 - \beta_2^2)}. \quad (12)$$

При больших $|z_j|$ и при отсутствии сосредоточенных источников тепла в области S_j функции $\Phi_j(z_j)$ ($j = 1, 2, 3$) имеют вид

$$\Phi_j(z_j) = B_j^\infty z_j + A_j^\infty + D_j^{(0)} z_j^{-1} + O\left(\frac{1}{z_j^2}\right) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (13)$$

причем для ортотропного материала при незакрепленной внешней границе тела

$$B_j^\infty = (-1)^j \frac{E_1 (\alpha_1 \beta_3^2 - \alpha_2) q_\infty}{2(\beta_3^2 - \beta_j^2) (\beta_1^2 - \beta_2^2)} \left(\frac{\cos \beta}{K_{11}} - i \frac{\sin \beta}{\beta_j K_{22}} \right) \quad (j = 1, 2), \quad (14)$$

$$A_j^\infty = \bar{A}_j^\infty = (-1)^j \frac{E_1 (\alpha_1 \beta_3^2 - \alpha_2) T_\infty}{2(\beta_3^2 - \beta_j^2) (\beta_1^2 - \beta_2^2)} \quad (j = 1, 2), \quad A_3^\infty = \frac{1}{2} T_\infty.$$

Здесь q_∞ — интенсивность теплового потока; T_∞ — температура тела на бесконечности. Постоянные $D_j^{(k)}$ ($j = 1, 2$) определяются из условия (11).

Регулярная функция, совершающая конформное отображение внешности единичной окружности γ ($|\zeta| \geq 1$) на внешность контура L области S , имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^N C_k \zeta^{-k} \right) \quad (\omega'(\zeta) \neq 0, \quad |\zeta| \geq 1). \quad (15)$$

Соотношение (10) с учетом (15) принимает вид

$$t_j = \frac{R_j}{R} \left[\omega(\sigma) + m_j \bar{\omega} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right] \quad (t_j \in L_j, \quad \sigma \in \gamma), \quad (16)$$

где

$$R_j = \frac{1}{2} R (1 - i\mu_j); \quad m_j = \frac{1 + i\mu_j}{1 - i\mu_j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Выражения (16) представляют собой граничное значение функций [4]

$$z_j = \omega_j(\zeta_j) = \frac{R_j}{R} \left[\omega(\zeta_j) + m_j \bar{\omega} \left(\frac{1}{\zeta_j} \right) \right] \quad (z_j \in S_j, \quad |\zeta_j| \geq 1), \quad (17)$$

регулярных в областях $|\zeta_j| \geq 1$, кроме точек $\zeta_j = \infty$, где они имеют полюс порядка N . Функции $\omega_j(\zeta_j)$ и $\bar{\omega}_j(\zeta_j)$ имеют нули, расположенные вне единичной окружности γ ($|\zeta_j| \geq 1$), число которых равно $N - 1$ [5]. Только при $N = 0$ (круговое отверстие) и $N = 1$ (эллиптическое отверстие) $\omega_j(\zeta_j) \neq 0$ и $\bar{\omega}_j(\zeta_j) \neq 0$ вне γ .

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_j(z_j) &= \Phi_j[\omega_j(\zeta_j)] = \frac{1}{2} B_j^\infty \omega_j^2(\zeta_j) + \Phi_{*j}(\zeta_j) \quad (j = 1, 2), \\ \Phi_3(z_3) &= \Phi_3[\omega_3(\zeta_3)] = \Phi_{*3}(\zeta_3), \end{aligned} \quad (18)$$

находим

$$\begin{aligned} \Phi'_j(z_j) &= \Phi'_j(z_j) = B_j^\infty \omega_j(\zeta_j) + \frac{\Phi'_{*j}(\zeta_j)}{\omega_j(\zeta_j)} \quad (j = 1, 2), \\ \Phi'_3(z_3) &= \frac{\Phi'_{*3}(\zeta_3)}{\omega_3(\zeta_3)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\omega'_j(\zeta_j) = \frac{R_j}{R} \left[\omega'(\zeta_j) - m_j \zeta_j^{-2} \bar{\omega}' \left(\frac{1}{\zeta_j} \right) \right] \quad (j = 1, 2, 3). \quad (20)$$

Функции $\Phi_{*j}(\zeta_j)$ ($j = 1, 2$) и $\Phi_{*3}(\zeta_3)$ ограничены в областях $1 \leq |\zeta_j| < \infty$, а в точках $\zeta_j = \infty$ функции $\Phi_{*j}(\zeta_j)$ имеют полюс порядка $2N$, а функция $\Phi_{*3}(\zeta_3)$ — полюс порядка N . Последние утверждения вытекают из условий ограниченности напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} и вращения ω_z на бесконечности ($|\zeta_j| \rightarrow \infty$) при отсутствии теплового потока ($q_\infty = 0$), ограниченности перемещений в области $1 \leq |\zeta_j| < \infty$ и ограниченности теплового потока на бесконечности согласно условию (6). Следовательно, функции $\Phi_{*3}(\zeta_3)$, $\Phi_{*j}(\zeta_j)$ ($j = 1, 2$) при достаточно больших $|\zeta_j|$ можно представить в виде рядов

$$\Phi_{*j}(\zeta_j) = D^{(j)} \ln \zeta_j + \sum_{k=1}^{2N} a_k^{(j)} \zeta_j^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(j)} \zeta_j^{-k} \quad (j = 1, 2), \quad (21)$$

$$\Phi_{*3}(\zeta_3) = \sum_{k=1}^N g_k \zeta_3^k + \sum_{k=0}^{\infty} G_k \zeta_3^{-k} \quad \left(G_0 = \frac{1}{2} T_\infty \right). \quad (22)$$

Однозначные функции (19) не имеют других особых точек, кроме полюсов, совпадающих с нулями функции $\omega_j(\zeta_j)$. При надлежащем определении функций $\Phi'_{*j}(\zeta_j)$ и $\Phi'_{*3}(\zeta_3)$ можно достичь того, что функции (19) будут ограниченными в областях $1 \leq |\zeta_j| < \infty$ и иметь соответствующий порядок

полюса на бесконечности. Для этого достаточно потребовать, чтобы нули функций $\Phi_{*j}(\zeta_j)$, $\Phi_{*3}(\zeta_3)$ совпадали в области $1 \leq |\zeta_j| < \infty$ с нулями функции $\omega_j(\zeta_j)$. Следовательно, функции $\Phi_{*j}(\zeta_j)$ и $\Phi_{*3}(\zeta_3)$ должны удовлетворять условиям

$$\Phi_{*j}'(\zeta_j^{(v)}) = 0, \quad \Phi_{*3}'(\zeta_3^{(v)}) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, N-1) \quad (j = 1, 2), \quad (23)$$

где $\zeta_j^{(v)}$ — корни уравнений

$$\omega_j(\zeta_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (24)$$

по модулю больше единицы ($|\zeta_j^{(v)}| > 1$).

На основании выражений (15), (20), (21) и (22) функции (19) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_j'(z_j) &= B_j^\infty \omega_j(\zeta_j) + \frac{D^{(j)} + \sum_{k=1}^{2N} k a_k^{(j)} \zeta_j^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} k A_k^{(j)} \zeta_j^{-k}}{R_j \left[\left(\zeta_j - \sum_{k=1}^N k C_{k\zeta_j}^{-k} \right) - m_j \bar{R} R^{-1} \left(\zeta_j^{-1} - \sum_{k=1}^N k \bar{C}_{k\zeta_j}^{-k} \right) \right]}, \quad (25) \\ \Phi_3'(z_3) &= \frac{\sum_{k=1}^N k g_k \zeta_3^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} k G_{k\zeta_3}^{-k}}{R_3 \left[\left(\zeta_3 - \sum_{k=1}^N k C_{k\zeta_3}^{-k} \right) - n_3 \bar{R} R^{-1} \left(\zeta_3^{-1} - \sum_{k=1}^N k \bar{C}_{k\zeta_3}^{-k} \right) \right]}. \quad (26) \end{aligned}$$

Условия (23) с учетом разложений (21) и (22) запишутся так:

$$\sum_{k=1}^{N-1} k A_k^{(j)} (\zeta_j^{(v)})^{-k} - \sum_{k=1}^{N-1} k a_k^{(j)} (\zeta_j^{(v)})^k = \sum_{k=N}^{2N} k a_k^{(j)} (\zeta_j^{(v)})^k + D^{(j)} - \sum_{k=N}^{\infty} k A_k^{(j)} (\zeta_j^{(v)})^{-k} \quad (27)$$

$$(v = 1, 2, \dots, N-1) \quad (j = 1, 2),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k G_k (\zeta_3^{(v)})^{-k} - \sum_{k=1}^{N-1} k g_k (\zeta_3^{(v)})^k = N g_N (\zeta_3^{(v)})^N \quad (v = 1, 2, \dots, N-1). \quad (28)$$

Коэффициенты $a_k^{(j)}$ ($k = N, N+1, \dots, 2N$) и g_N определяются из условий на бесконечности.

В преобразованной области граничные условия (7), (8) принимают вид

$$\begin{aligned} K \int_{\gamma} F_*(\sigma) d[\Phi_{*3}(\sigma) - \overline{\Phi_{*3}(\sigma)}] &= \int_{\gamma} Q(\sigma) F_*(\sigma) |\omega'(\sigma)| \sigma^{-1} d\sigma; \quad (29) \\ \int_{\gamma} F_*(\sigma) dU &= -r(1 + i\mu_3) \int_{\gamma} F_*(\sigma) \Phi_{*3}(\sigma) \omega_3'(\sigma) d\sigma - \\ &\quad - \bar{r}(1 + i\bar{\mu}_3) \int_{\gamma} F_*(\sigma) \overline{\Phi_{*3}(\sigma)} \overline{\omega_3'(\sigma)} d\bar{\sigma}, \\ \int_{\gamma} \overline{F_*(\sigma)} dU &= -r(1 + i\mu_3) \int_{\gamma} \overline{F_*(\sigma)} \Phi_{*3}(\sigma) \omega_3'(\sigma) d\sigma - \\ &\quad - \bar{r}(1 + i\bar{\mu}_3) \int_{\gamma} \overline{F_*(\sigma)} \overline{\Phi_{*3}(\sigma)} \overline{\omega_3'(\sigma)} d\bar{\sigma}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $F_*(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ — произвольная функция, голоморфная вне γ , которую представим в виде ряда

$$F_*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \zeta^{-n}. \quad (31)$$

Внесем выражения (9), (15), (17), (18), (20) — (22) в граничные условия (30) и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура γ .

Полагая при этом все E_j , кроме E_n , равными нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомым функций $\varphi_{\cdot j}(\xi_j)$ вида

$$\sum_{j=1}^2 [(1 + i\bar{\mu}_j) \bar{A}_n^{(j)} + (1 + i\mu_j) a_n^{(j)}] = q_n, \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^2 [(1 + i\mu_j) A_n^{(j)} + (1 + i\bar{\mu}_j) \bar{a}_n^{(j)}] = f_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty),$$

причем $a_n^{(j)} = 0$ при $n > 2N$, $a_n^{(j)} = \lambda_n^{(j)} A_j^\infty$ ($j = 1, 2$). Здесь обозначено

$$\begin{aligned} q_n = & - \sum_{j=1}^2 \left[\frac{(1 + i\mu_j) B_j^\infty}{n} \varepsilon_{n-1}^{(j)} - \frac{(1 + i\bar{\mu}_j) \bar{B}_j^\infty}{n} \bar{\eta}_{n+1}^{(j)} \right] - \\ & - \frac{r(1 + i\mu_3)}{n} \gamma_{n-1} + \frac{\bar{r}(1 + i\bar{\mu}_3)}{n} \bar{\delta}_{n+1}, \\ f_n = & \sum_{j=1}^2 \left[\frac{(1 + i\mu_j) B_j^\infty}{n} \eta_{n+1}^{(j)} - \frac{(1 + i\bar{\mu}_j) \bar{B}_j^\infty}{n} \bar{\varepsilon}_{n-1}^{(j)} \right] + \\ & + \frac{r(1 + i\mu_3)}{n} \delta_{n+1} - \frac{\bar{r}(1 + i\bar{\mu}_3)}{n} \bar{\gamma}_{n-1}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \sum_{k=1}^n k \lambda_k^{(3)} g_{n-k+1} + \sum_{k=1}^N k \lambda_k^{(3)} G_{k-n-1} - \sum_{k=1}^{N-n-1} k \mu_k^{(3)} g_{k+n+1}; \\ \delta_n &= \sum_{k=1}^N k \lambda_k^{(3)} G_{k+n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k \mu_k^{(3)} G_{n-k-1} - \sum_{k=1}^N k \mu_k^{(3)} g_{k-n+1}; \\ \varepsilon_n^{(j)} &= \sum_{k=1}^n k \lambda_k^{(j)} \lambda_{n-k+1}^{(j)} + \sum_{k=1}^N k \lambda_k^{(j)} \mu_{k-n-1}^{(j)} - \sum_{k=1}^{N-n-1} k \mu_k^{(j)} \lambda_{k+n+1}^{(j)}; \\ \eta_n^{(j)} &= \sum_{k=1}^{N-n+1} k \lambda_k^{(j)} \mu_{k+n-1}^{(j)} - \sum_{k=1}^{n-2} k \mu_k^{(j)} \mu_{n-k-1}^{(j)} - \sum_{k=1}^N k \mu_k^{(j)} \lambda_{k-n+1}^{(j)}, \end{aligned} \quad (34)$$

причем

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(j)} &= 0; \quad \lambda_1^{(j)} = \frac{1}{2} [R(1 - i\mu_j) + (1 + i\mu_j) \bar{R} \bar{C}_1]; \quad \lambda_n^{(j)} = \frac{1}{2} \bar{R} (1 + i\mu_j) \bar{C}_n; \\ \mu_0^{(j)} &= 0; \quad \mu_1^{(j)} = \frac{1}{2} [R(1 + i\mu_j) + (1 - i\mu_j) R C_1]; \quad \mu_n^{(j)} = \frac{1}{2} R (1 - i\mu_j) C_n \\ & \quad (n = 2, 3, \dots, N); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\mu_n^{(j)} = 0; \quad \lambda_n^{(j)} = 0; \quad g_n = 0 \quad \text{при } n > N;$$

$$\varepsilon_n^{(j)} = 0; \quad \gamma_n = 0 \quad \text{при } n > 2N - 1; \quad \eta_n^{(j)} = 0 \quad \text{при } n > 2N + 1;$$

$$\delta_0 = 0; \quad \eta_0^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Из условия (11) с учетом (18), (20) — (22) и (15) находим

$$D^{(j)} = D_j^{(1)} \delta_1 - D_j^{(2)} \bar{\delta}_1 \quad (j = 1, 2). \quad (36)$$

Решая систему (32) при $n > 2N$, получаем

$$\begin{aligned} A_n^{(j)} &= (-1)^j \frac{1 - i\mu_{3-j}}{2i(\mu_2 - \mu_1)} f_n + (-1)^{j+1} \frac{1 + i\mu_{3-j}}{2i(\mu_2 - \mu_1)} q_n \\ & \quad (n > 2N) \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (37)$$

Присоединив к системе (32) ($n = 1, 2, \dots, N - 1$) равенство (27), получим конечную систему линейных алгебраических уравнений порядка $4(N - 1)$ (N — наибольшая отрицательная степень в разложении отображающей

функции (15)) для определения остальных коэффициентов разложения функции $\varphi_{*j}(\xi_j)$ ($j = 1, 2$).

В формулы (34) входят коэффициенты g_n и \bar{G}_n разложения функции $\Phi_{*3}(\xi_3)$ (22), подлежащие определению. Внесем разложения (22) и (31) в граничное условие (29) и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура γ . Получим

$$n(g_n - \bar{G}_n) = \frac{1}{2\pi i K} \int_{\gamma^*} Q(\sigma) |\omega'(\sigma)| \sigma^{-(n+1)} d\sigma \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty), \quad (38)$$

причем $g_n = 0$ при $n > N$, $g_N = \lambda_N^{(3)} B_N^\infty$. Присоединив к системе (38) ($n = 1, 2, \dots, N-1$) равенства (28), получим конечную систему линейных алгебраических уравнений порядка $2(N-1)$ для определения коэффициентов g_n и \bar{G}_n ($n = 1, 2, \dots, N-1$). Остальные коэффициенты \bar{G}_n ($n \geq N$) определяются по формуле (38).

Плотность теплового потока $Q(s)$, заданного на границе отверстия L области S , разложим на единичной окружности γ в комплексный ряд Фурье

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \sigma^{-k}. \quad (39)$$

Внесем разложение (39) в правую часть равенств (38) и получим

$$n(g_n - \bar{G}_n) = -\frac{RQ_0}{K} h_{\frac{n}{N+1}} - \frac{R}{K} \sum_{k=1}^{\infty} (Q_k h_{\frac{k-n}{N+1}} + \bar{Q}_k h_{\frac{k+n}{N+1}}) \quad (40)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

Здесь

$$h_{\frac{k+n}{N+1}} = -\frac{1}{2\pi i R} \int_{\gamma^*} |\omega'(\sigma)| \sigma^{-k-n-1} d\sigma; \quad h_l = h_{-l}. \quad (41)$$

Если коэффициенты разложения отображающей функции (15) удовлетворяют условию $C_k = C_N \delta_{kN}$ (δ_{kN} — символ Кронекера), то интегралы (41) вычисляются по формуле

$$h_{|l|}(m) = \frac{2m}{\pi} [I_{2|l|+1}(m) + I_{2|l|-1}(m)] - \frac{2(1+m^2)}{\pi} I_{2|l|}(m), \quad (42)$$

где

$$I_{|l|}(m) = m^{\frac{|l|}{2}} \int_0^1 \frac{x^{|l|} dx}{\sqrt{(1+x^2)(1-m^2x^2)}}; \quad m = NC_N; \quad I_l = I_{-l}. \quad (43)$$

Интеграл (43) равен нулю при l нечетных, а $h_l = 0$ при l дробных. При больших l справедлива оценка

$$I_{2|l|}(m) < \frac{\pi}{2} \frac{m^{|l|}}{\sqrt{\pi|l|}} \quad (|m| < 1). \quad (44)$$

Рассмотрим задачу термоупругости для ортотропной (относительно упругих и тепловых свойств) пластинки с квадратным отверстием с закругленными углами. Оси координат x и y направим параллельно главным направлениям упругости и теплопроводности, которые предполагаются совпадающими. Тепловой поток на бесконечности отсутствует ($q_\infty = 0$), а на

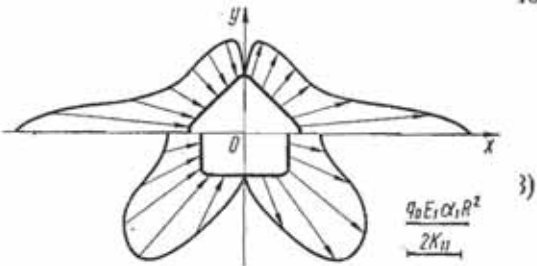


Рис. 2

контуре квадратного отверстия L задана плотность теплового потока, изменяющаяся по закону

$$q_n|_L = Q(s) = q_0 x. \quad (45)$$

В рассматриваемом случае $N = 3$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = \bar{C}_3$, $R = \bar{R}$, $K_{12} = 0$, $\alpha_6 = 0$, $\mu_j = i\beta_j$ ($j = 1, 2, 3$). При положительном значении C_3 вершины квадрата лежат на осях x и y , а при отрицательном — стороны квадрата параллельны осям координат.

Вычисления произведены для пластинки, изготовленной из стекло-текстолита КАСТ-В со следующими упругими и теплофизическими характеристиками: $\frac{E_1}{E_2} = 1,45$; $\frac{E_1}{G} = 6$; $\nu_1 = 0,17$; $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0,8$; $\frac{K_{22}}{K_{11}} = 0,6$. На рис. 2 приведены графики распределения напряжений σ_θ (в долях $\frac{q_0 E_1 \alpha_1 R^2}{K_{11}}$) вдоль контура квадратного отверстия с закругленными углами ($C_3 = \mp 1/q$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964. 487 с.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957. 463 с.
3. Мартынович Т. Л. Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 2, с. 64—69.
4. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А., Махмуд Аллам. Температурные напряжения около эллиптического отверстия в анизотропной пластинке. — Прикл. механика, 1974, 10, № 1, с. 72—78.
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1954. 444 с.
6. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск, Изд-во Белорус. ун-та, 1972. 198 с.
7. Уздалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1967. 166 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию
12.10.77

УДК 539.377

А. Н. Кулик, М. И. Микитин

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ, НАГРЕВАЕМОЙ ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЕЙНЫМ ПОДВИЖНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрим тонкую изотропную полубесконечную пластинку толщиной 2δ , по боковой поверхности $z = +\delta$ которой на расстоянии $x = d$ параллельно свободному краю движется с постоянной скоростью v линейный источник тепла длиной l и удельной мощностью q_0 (рис. 1). Температуры сред t_c^\pm , омывающих боковые поверхности $z = \pm \delta$ пластинки, положим равными нулю. Для определения неустановившегося температурного поля имеем уравнения теплопроводности¹

$$\begin{aligned} \Delta T - C \frac{\partial T}{\partial \tau} - \alpha_+ T - \alpha_- T^* &= -Q\delta(x-d), \\ \Delta T^* - C \frac{\partial T^*}{\partial \tau} - 12 \left(\frac{\alpha_+}{4} + \frac{1}{r} \right) T^* - 3\alpha_- T &= -3Q\delta(x-d) \end{aligned} \quad (1)$$

¹ Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. Киев, 1972.