

Из условий непрерывности потенциалов $\psi^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$ на поверхностях $x = \pm l_1$

$$\begin{aligned} -t_1 \eta_3 \lambda_3^{-1} (1 - l_1 l^{-1}) + C_3 &= -t_1 \eta_1 \lambda_1^{-1} (1 - l_1 l^{-1}) + C_1, \\ -t_1 \eta_2 \lambda_2^{-1} (1 - l_1 l^{-1}) + C_2 &= -t_1 \eta_3 \lambda_3^{-1} (1 - l_1 l^{-1}) + C_3 \end{aligned} \quad (15)$$

находим

$$C_1 - C_2 = t_1 (1 - l_1 l^{-1}) (\eta_1 \lambda_1^{-1} - \eta_2 \lambda_2^{-1}). \quad (16)$$

Таким образом, в произвольный момент времени

$$\mathcal{E}_{M_1 M_2}(\tau) = t_1 (1 - l_1(\tau) l^{-1}) (\eta_1 \lambda_1^{-1} - \eta_2 \lambda_2^{-1}). \quad (17)$$

Отметим, что в начальный момент времени ($\tau = 0$) $l_1 = 0$ и

$$\mathcal{E}_{M_1 M_2}(\tau = 0) = t_1 (\eta_1 \lambda_1^{-1} - \eta_2 \lambda_2^{-1}).$$

Значения величин $l_1(\tau) l^{-1}$ для различных моментов времени определяются по известному распределению концентрации растворенного вещества.

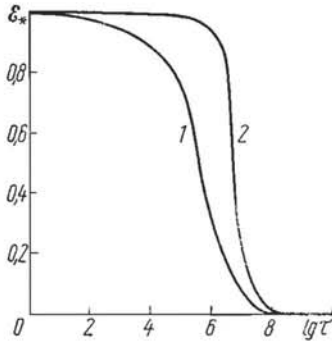


Рис. 5

Изменение во времени относительной термо-ЭДС $\mathcal{E}_* = \frac{\mathcal{E}_{M_1 M_2}(\tau)}{\mathcal{E}_{M_1 M_2}(\tau = 0)}$ массоизолированной вольфрамений-вольфрамениевой термопары при максимальном коэффициенте диффузии рения в вольфраме иллюстрирует рис. 5. При этом кривая 1 соответствует случаю, когда ширина зоны нагрева $l = 4 \cdot 10^{-3}$ м, а кривая 2 — когда ширина зоны нагрева $l = 8 \cdot 10^{-3}$ м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Подстригач Я. С. Исходные уравнения теории деформации неполяризованных электропроводных твердых тел.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., 1974, с. 167—178.
2. Подстригач Я. С., Павлина В. С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n -компонентном твердом растворе.— Физ.-хим. механика материалов, 1965, № 4, с. 383—389.
3. Датчики для измерения температуры в промышленности / Г. В. Самсонов, А. И. Киц, О. А. Кюздени, В. И. Лах, И. Ф. Паляныця, Б. И. Стаднык. Киев, Наук. думка, 1972. 224 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР, НПО «Термоприбор»

Поступила в редколлегию 15.11.77

УДК 534.141;16 : 539.3

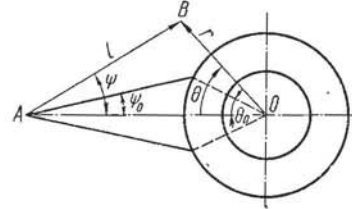
А. П. Поддубняк

ЭХО-СИГНАЛ ОТ УПРУГОЙ СФЕРЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ОСТРОНАПРАВЛЕННОГО ЗВУКОВОГО ИМПУЛЬСА

Постановка задачи. Пусть в акустической невязкой сжимаемой среде находится упругая полая сфера, заполненная сжимаемой невязкой жидкостью. Предположим, что на сферу набегают зондирующий импульс, возбужденный преобразователем остронаправленного действия, размещенным на значительном расстоянии от исследуемого объекта. Рассмотрим случай, когда преобразователь имеет характеристику направленности в виде тела вращения, ось которого совпадает с акустической осью системы [3]

и проходит через центр сферы (рисунок). Таким образом, ограничимся изучением осесимметричной задачи.

Считаем, что остронаправленный преобразователь A возбуждает кратковременный импульс определенного типа (например, синусоидальный). Преобразователь и сфера неподвижны относительно пространства, в котором они находятся, а их центры A и O совпадают с началами сферических систем координат (l, ψ, φ) и (r, θ, α) соответственно. Здесь и в дальнейшем линейные величины условно отнесены к внешнему радиусу сферы a .



Задача состоит в определении давления

p_e , возникшего в результате взаимодействия остронаправленного звукового импульса со сферическим объектом, удовлетворяющего волновому уравнению

$$\square^2 p_e = 0 \quad (1)$$

(\square^2 — оператор Даламбера) при нулевых начальных условиях, условию излучения на бесконечности и условиям гидроупругого контакта, которые приведены в работе [1].

Давление в набегающей звуковой волне дальнего по отношению к излучателю поля примем в виде

$$p_i(l, \psi, \tau) \equiv p_i(r, \theta, \tau) = p_* l_0 l^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\tau - l - \xi) D(\psi, \xi) d\xi, \quad (2)$$

$$p_* = (4\pi/\Psi_0) p_0,$$

где $A_0(\tau)$ ($A_0(\tau) = 0; \tau \leq 0$) — функция заполнения зондирующего импульса во времени; $D(\psi, \tau) \equiv D(r, \theta, \tau)$ — величина, определяющая направленность импульса посылки; p_0 — постоянная, имеющая размерность давления; l_0 — безразмерное расстояние от центра преобразователя к центру сферы; Ψ_0 — телесный угол, в котором сосредоточена энергия импульса посылки; $\tau = ct/a$, t — время, c — скорость звука в акустическом пространстве. Кроме того, как видно из рисунка,

$$l \equiv l(r, \theta) = \sqrt{l_0^2 - 2l_0 r \cos \theta + r^2}. \quad (3)$$

В случае, когда

$$D(\psi, \tau) = D_0(\psi) \delta(\tau) \quad (D_0(\psi) \equiv D_0(r, \theta)), \quad (4)$$

излучающая система имеет явно выраженную направленность с характеристикой направленности $D_0(\psi)$. При этом

$$p_i(r, \theta, \tau) = p_* l_0 l^{-1} A_0(\tau - l) D_0(r, \theta). \quad (5)$$

Метод решения задачи. Задача решается с помощью интегрального преобразования Фурье по безразмерному времени τ :

$$\bar{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (6)$$

На основании формул (6) и (2) получаем

$$\bar{p}_i(r, \theta, \omega) = p_* l_0 l^{-1} \bar{A}_0(\omega) e^{i\omega l} R(\psi, \omega), \quad (7)$$

где $\bar{A}_0(\omega)$ — преобразование Фурье от $A_0(\tau)$, а

$$R(\psi, \omega) \equiv R(r, \theta, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\psi, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (8)$$

В случае, когда имеет место соотношение (4),

$$R(\psi, \omega) = D_0(\psi). \quad (9)$$

Применяя преобразование Фурье к волновому уравнению (1) и разделяя в полученном уравнении переменные, с учетом преобразованных краевых соотношений после некоторых выкладок представим фурье-трансформанту эхо-сигнала в виде

$$\bar{p}_e(r, \theta, \omega) = p_* l_0 \bar{A}_0(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta) \times \\ \times \{f_{1n}(\omega) [a_n(\omega) + b_n(\omega)] + f_{2n}(\omega) c_n(\omega)\}, \quad (10)$$

где

$$f_{1n}(\omega) = -i\omega^2 [h_n^{(2)}(\omega) + e^{-2i\eta_n(\omega)} h_n^{(1)}(\omega)]; \\ f_{2n}(\omega) = i\omega^2 [h_n^{(2)'}(\omega) + e^{-2i\eta_n(\omega)} h_n^{(1)'}(\omega)]; \\ a_n(\omega) = i\omega \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m'(\omega) h_m^{(1)}(\omega l_0) a_{nm}(\omega); \quad (11) \\ b_n(\omega) = i\omega \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(\omega) h_m^{(1)}(\omega l_0) b_{nm}(\omega); \\ c_n(\omega) = i\omega \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(\omega) h_m^{(1)}(\omega l_0) a_{nm}(\omega);$$

$$a_{nm}(\omega) = \int_0^{\pi} \sin \theta P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) R(1, \theta, \omega) d\theta;$$

$$b_{nm}(\omega) = \frac{1}{\omega} \left[\frac{d}{dr} \int_0^{\pi} \sin \theta P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) R(r, \theta, \omega) d\theta \right]_{r=1}.$$

В формулах (10), (11) $j_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$, $h_n^{(2)}(x)$ — сферические функции Бесселя; $P_n(x)$ — полиномы Лежандра; $\eta_n(\omega)$ — фазовая функция податливости, явный вид которой приведен в работе [4].

Решение задачи в виде (10) верно для любого типа осесимметричной направленной сферической звуковой волны, набегающей на сферический объект. В случае, когда эта волна направленностью не обладает, т. е. $D(\psi, \tau) = \delta(\tau)$ ($R(\psi, \omega) = 1$), получаем известный результат [1, 4].

Таким образом, вычисление эхо-сигнала сведено к вычислению рядов и интегралов (10), (11), (6₂). При этом необходимо задать конкретный вид функции $R(\psi, \omega)$ (либо $D(\psi, \tau)$).

Случай остронаправленного импульса посылки частного вида. Предположим, что излучатель набегающей на объект звуковой волны обладает «идеальной» характеристикой направленности [2]

$$D_0(\psi) = R(\psi, \omega) = R(\psi) = H(\sin \psi_0 - \sin \psi) = H\left(\sin \psi_0 - \frac{r \sin \theta}{l}\right), \quad (12)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда. Легко убедиться, что

$$R(\psi) \equiv R(r, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta < \theta_1, \\ 0, & \theta_1 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (13)$$

причем

$$\cos \theta_1 = \frac{\varepsilon}{r} \sin \psi_0 + \cos \psi_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2}, \quad \varepsilon = l_0 \sin \psi_0 < 1. \quad (14)$$

Выбрав характеристику направленности источника звука в виде (12), получим смещения в акустической среде, принимающие разрывы типа δ -функции при $\psi = \psi_0$. Предполагая, что в данной задаче эти смещения должны быть непрерывными в любой точке среды, коэффициент $b_n(\omega)$ в формулах (11) следует отбросить. Отметим, что телесный угол Ψ_0 в данном

случае определяется формулой

$$\Psi_0 = 4\pi \sin^2 \left(\frac{\Psi_0}{2} \right), \quad (15)$$

поэтому

$$p_* = p_0 \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\Psi_0}{2} \right). \quad (16)$$

Эхо-сигнал определяется по формулам (10), (11), (13), (16), (6₂). В случае, когда источник импульса посылки находится в дальнем по отношению к сферическому объекту поле ($l_0 \gg 1$, $\varepsilon < 1$), расчетная формула для давления в переизлученной волне имеет вид интеграла свертки

$$p_\varepsilon(r, \theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\tau - l - \xi) \mathcal{P}_\varepsilon(r, \theta, \xi) d\xi, \quad (17)$$

где

$$\mathcal{F}_\varepsilon(r, \theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathcal{P}}_\varepsilon(r, \theta, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_\varepsilon(r, \theta, \omega) = p_* l_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta) \times \\ \times [f_{1n}(\omega) a_n(\omega) + f_{2n}(\omega) c_n(\omega)]. \end{aligned}$$

Функции $f_{jn}(\omega)$ ($j = 1, 2$), $a_n(\omega)$ и $c_n(\omega)$ определяются формулами (11), причем $a_{nm}(\omega) = a_{nm}$,

$$a_{nm} = \frac{(1 - \mu_0^2) [P_n(\mu_0) P'_m(\mu_0) - P_m(\mu_0) P'_n(\mu_0)]}{m(m+1) - n(n+1)} \quad (n \neq m), \quad (19)$$

$$a_{nn} = \frac{1}{2n+1} \left[1 - \mu_0 P_n^2(\mu_0) - 2\mu_0 \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2(\mu_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} P_i(\mu_0) P_{i+1}(\mu_0) \right],$$

$$\mu_0 = \cos \theta_1 |_{r=1} = \cos \theta_0, \quad \theta_0 = \gamma_0 - \psi_0, \quad \gamma_0 = \arcsin \varepsilon.$$

Если набегающая звуковая волна имеет вид квазимонохроматического импульса, т. е.

$$A_0(\tau) = e^{-i\omega_0\tau} [H(\tau) - H(\tau - \tau_0)], \quad (20)$$

где ω_0 — несущая частота; τ_0 — длительность импульса, то эхо-сигнал принимает вид

$$p_\varepsilon(r, \theta, \tau) = \int_{-l}^{\tau_0} e^{-i\omega_0\xi} \mathcal{P}_\varepsilon(r, \theta, \tau - l - \xi) d\xi. \quad (21)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эхо-сигналы от упругих объектов / Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Т. 2. Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1974. 346 с.
2. Ультразвуковые преобразователи / Под ред. Е. Кикучи. М., Мир, 1972. 424 с.
3. Хортон Дж. У. Основы гидролокации. Л., Судпромгиз, 1961. 484 с.
4. Hickling R. Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water.— J. Acoust. Soc. Amer., 1964, 36, N 4, p. 1124—1137.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редакцию 10.10.77.