

На рис. 1, 2 построены графики k_j^- (в вершине τ_1) для значений угла $\beta = 0$ (сплошные линии) и $\beta = \frac{\pi}{2}$ (штриховые линии). Отметим, что ввиду симметрии $k_1^+(0) = k_1^-(0)$, $k_1^+(\frac{\pi}{2}) = -k_1^-(\frac{\pi}{2})$, $k_2^+(0) = -k_2^-(0)$, $k_2^+(\frac{\pi}{2}) = k_2^-(\frac{\pi}{2})$.

Коэффициенты интенсивности напряжений при произвольном угле β и фиксированном ε определим как суперпозицию их значений при углах $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$k_j(\beta) = k_j(0) \cos \beta + k_j\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \beta, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

На рис. 3 изображен график предельного значения теплового потока q_* при $\beta = 0$, а на рис. 4 — график предельного значения напряжений p_* при одноосном растяжении ($\lambda_p = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$). Анализ этих двух напряженных состояний, идентичных (в том смысле, что в обоих случаях $k_1^\pm > 0$) по своему воздействию на трещину, позволяет сделать вывод, что при термическом нагружении трещины взаимодействуют сильнее, чем при силовом. Здесь под критерием степени взаимодействия трещин подразумевается то минимальное значение параметра d , при котором предельные нагрузки в теле с одной трещиной и с системой трещин практически совпадают (одинаковое относительное отклонение): чем оно выше, тем сильнее взаимодействие.

Подсчитаны также значения q при $\beta = \frac{\pi}{2}$ и величина p_* при $\lambda_p = 0$, $\theta = 0$. Из анализа полученных результатов можно сделать вывод, что при растяжении или направлении теплового потока вдоль линии расположения трещин прочность тела выше, а при аналогичных воздействиях в направлении, перпендикулярном к указанному, ниже, чем прочность тела с одной трещиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С., Соколовский М. П. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для тела с периодической системой прямолинейных разрезов. — *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1976, вып. 4, с. 44—51.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, Наук. думка, 1976. 444 с.
3. Кривцун М. Г. Интегральные уравнения теплопроводности и термоупругости для плоскости с периодической системой криволинейных разрезов. — *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1978, вып. 8, с. 48—53.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 10.11.77

УДК 539.3

Ю. З. Повстенко

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭНЕРГИИ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Отличительной особенностью решений задач теории упругости при граничных условиях для механических параметров, учитывающих поверхностные эффекты, является существование в теле напряжений, вызванных неоднородностью распределения поверхностной энергии, при отсутствии внешней

нагрузки. Таким образом, класс задач о напряженно-деформированном состоянии твердых тел расширяется на тот случай, когда поверхностная энергия γ зависит от координат x, y на поверхности. В настоящей работе рассмотрена система уравнений линейного идеально упругого твердого тела

$$G\Delta\vec{u} + (\lambda + G) \text{grad div } \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + \lambda e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} \quad (2)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \sigma_{xn}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial y} = \sigma_{yn} \quad (3)$$

(\vec{n} — внешняя нормаль к граничной поверхности).

В качестве примера найдем напряжения в полупространстве $z \geq 0$, на границе которого в области $r > R$ поверхностная энергия γ имеет одно значение, равное γ_1 , а при $r < R$ — другое, равное γ_2 :

$$\gamma = \gamma_2 - (\gamma_2 - \gamma_1) S(r - R), \quad (4)$$

где $S(r - R)$ — функция скачка. Такая ситуация может возникнуть, например, при смачивании локальной области границы поверхностно активным веществом или при растекании шлака по поверхности чистого материала.

Граничное условие (3) можно переписать в виде

$$\sigma_{rz} \equiv g(r) = -\frac{\partial\gamma}{\partial r} = (\gamma_2 - \gamma_1) \delta(r - R). \quad (5)$$

Знак «минус» появляется в формуле (5) вследствие того, что для полупространства $z \geq 0$ внешняя нормаль \vec{n} направлена в сторону отрицательной оси z .

Решение задачи (1), (2), (5) для полупространства $z \geq 0$ в случае осесимметричной функции $g(r)$ можно получить, если использовать бигармоническую функцию Лява и применять преобразование Ханкеля по координате r . Компоненты тензора напряжений выражаются следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \int_0^{\infty} B(\alpha) \alpha^3 e^{-\alpha z} \left[(2 - \alpha z) J_0(\alpha r) + (2\nu - 2 + \alpha z) \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] d\alpha, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G \int_0^{\infty} B(\alpha) \alpha^3 e^{-\alpha z} \left[2\nu J_0(\alpha r) - (2\nu - 2 + \alpha z) \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] d\alpha, \quad (6) \\ \sigma_{zz} &= 2Gz \int_0^{\infty} B(\alpha) \alpha^4 e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha, \\ \sigma_{rz} &= -2G \int_0^{\infty} B(\alpha) \alpha^3 e^{-\alpha z} (1 - \alpha z) J_1(\alpha r) d\alpha. \end{aligned}$$

Величина $B(\alpha)$ находится из условия

$$2GB(\alpha)\alpha^2 = - \int_0^{\infty} r g(r) J_1(\alpha r) dr. \quad (7)$$

Подставляя в (7) значение $g(r)$ из формулы (5), получаем

$$B(\alpha) = - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2G} R \frac{J_1(\alpha R)}{\alpha^2} \quad (8)$$

и

$$\sigma_{rr} = -A \left[2\Phi_1 - z\Phi_2 + 2(\nu - 1) \frac{\Phi_3}{r} + \frac{z}{r} \Phi_4 \right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= -A \left[2\nu\Phi_1 - 2(\nu - 1) \frac{\Phi_3}{r} - \frac{z}{r} \Phi_4 \right], \\ \sigma_{zz} &= -Az\Phi_2, \\ \sigma_{rz} &= A(\Phi_4 - z\Phi_5),\end{aligned}\tag{9}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} \alpha J_0(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha, \\ \Phi_2 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} \alpha^2 J_0(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha, \\ \Phi_3 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha, \\ \Phi_4 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} \alpha J_1(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha, \\ \Phi_5 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} \alpha^2 J_1(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha, \\ A &= (\gamma_2 - \gamma_1) R.\end{aligned}\tag{10}$$

Интегралы (10) могут быть выражены через следующие [1, 2]:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) J_0(\alpha R) d\alpha = \frac{1}{\pi \sqrt{Rr}} Q_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2 + z^2 + R^2}{2rR} \right), \\ I_2 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha = \frac{1}{\pi \sqrt{Rr}} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2 + z^2 + R^2}{2rR} \right), \\ I_3 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha = \frac{1}{\pi R} f, \\ I_4 &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) J_0(\alpha R) d\alpha = \frac{1}{\pi r} f\end{aligned}\tag{11}$$

с помощью дифференцирования по параметру по формулам

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -\frac{\partial I_1}{\partial R}, \quad \Phi_2 = -\frac{\partial^2 I_3}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial I_3}{\partial R} + \frac{I_3}{R^2}, \\ \Phi_3 &\equiv I_2, \quad \Phi_4 = -\frac{\partial I_4}{\partial R}, \quad \Phi_5 = -\frac{\partial^2 I_2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial I_2}{\partial R} + \frac{I_2}{R^2}.\end{aligned}\tag{12}$$

В выражениях (11) использованы обозначения

$f = K'E(k, \theta) + (E' - K')F(k, \theta) - z[(R+r)^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} K'$,
 $F(k, \theta)$, $E(k, \theta)$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k = \sqrt{\frac{(R-r)^2 + z^2}{(R+r)^2 + z^2}}$ и аргументом $\theta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{(R-r)^2 + z^2}}$;
 K' и E' — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с дополнительным модулем $k' = \sqrt{1 - k^2}$; $Q_{-\frac{1}{2}}$ и $Q_{\frac{1}{2}}$ — функции Лежандра.

Функции Лежандра полуцелого индекса выражаются через полные эллиптические интегралы. В частности, справедливы соотношения

$$Q_{\frac{1}{2}}(v) = \frac{1}{\sqrt{Rr}} \left[\frac{r^2 + R^2}{r + R} K(w) - (r + R) E(w) \right],$$

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\nu) = \omega K(\omega), \quad \frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}}(\nu)}{\partial R} = -\sqrt{\frac{r}{R}} \frac{1}{R-r} E(\omega), \quad (13)$$

$$\nu = \frac{r^2 + R^2}{2rR}, \quad \omega = \frac{2\sqrt{rR}}{r+R}.$$

Напряжения на поверхности полупространства выражаются следующим образом:

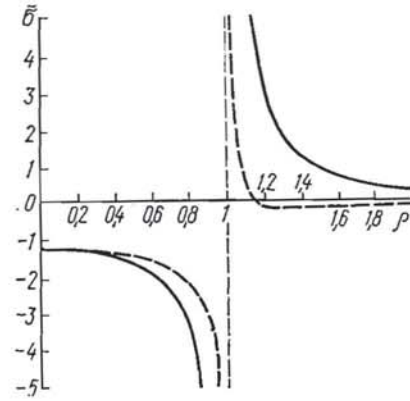
$$\sigma_{rr} = 2(\gamma_2 - \gamma_1)[(1-\nu)C_1 - C_2],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2(\gamma_2 - \gamma_1)[(\nu-1)C_1 - \nu C_2],$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi r^2} \times$$

$$\times \left[\frac{r^2 + R^2}{r+R} K(\omega) - (r+R) E(\omega) \right],$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{r+R} K(\omega) + \frac{1}{r-R} E(\omega) \right].$$



Зависимость безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_{rr}$ (сплошная линия) и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ (штриховая линия) от безразмерного радиуса $\rho = \frac{r}{R}$ при $z = 0$ в случае $\nu = 0,25$ приведена на рисунке; $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}R}{\gamma_2 - \gamma_1}$.

Поскольку в окрестности неоднородности распределения поверхностной энергии возникают значительные градиенты напряжений, то при определенных условиях в указанной области может происходить интенсивная миграция различных структурных несовершенств кристаллического строения твердых тел, что может повлиять на протекание физико-механических процессов на поверхности тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971. 1108 с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М., Мир, 1975. 872 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.08.77

УДК 532.72 : 537.22

Б. П. Галапац, Б. М. Гнидец, Б. И. Стадник, П. Г. Столярчук

ТЕРМОДИФфуЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ СЛОЕ

При эксплуатации термоэлектрических преобразователей температуры вследствие протекания различных физических процессов изменяются их метрологические свойства. С целью прогнозирования дестабилизации термоэлектрических характеристик в зависимости от рабочей температуры необходимо аналитически исследовать физические процессы, наиболее существенно влияющие на метрологические свойства в условиях эксплуатации. Для вольфрамниевых термпар таким определяющим процессом является процесс диффузии рения [3].

В настоящей работе исследована диффузия рения с учетом его испарения во внешнюю среду в неоднородно нагретых вольфрамниевых термоэлектродах, а также влияние процесса диффузии на термо-ЭДС вольфрамниевый-вольфрамниевой термпары. При этом принимается, что рений диффундирует в виде электронейтрального атома.