

Проведем расчет оптимальных режимов нагрева для функций $t_H(\beta) = t_0 = \text{const}$, $t_H(\beta) = t_0(1 + \cos \beta)$. В первом случае за время $0 \leq \tau \leq 1$ требуется нагреть цилиндрическую оболочку до постоянной температуры. Тогда все коэффициенты разложения функции $t^+(\beta, \tau)$, кроме первого, при $k = 0$ обращаются в нули, т. е. $t^+ = t_{10}^+(\tau)$.

Численные расчеты выполнены для стальной оболочки с $h = 10^{-4}$ м, $R = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $C_0 = 5,3 \cdot 10^3$ м/с, $\nu = 0,3$, $a^2 = 7,7 \cdot 10^{-4}$ с/м² при $\tau_2' =$

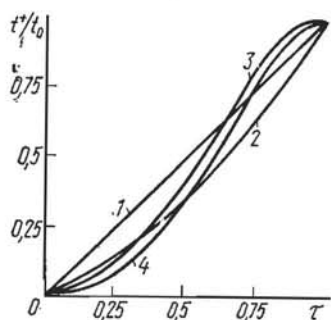


Рис. 1

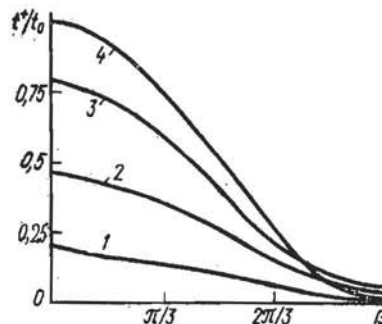


Рис. 2

$= 2\tau_1'$. На рис. 1 изображены графики функции $\frac{t^+(\tau)}{t_0}$ для $0 \leq \tau \leq 1$. Кривые 1—4 соответствуют $\tau_1' = 10^{-6}$, $3 \cdot 10^{-6}$, $3 \cdot 10^{-5}$, 10^{-4} с.

Численные исследования оптимального режима нагрева во втором случае выполнены для той же оболочки при $\tau_1' = 10^{-4}$ с. На рис. 2 кривые 1—4 характеризуют поведение функции $\frac{t^+(\beta, \tau)}{t_0}$ для значений $\tau = 0,4$; $0,6$; $0,8$; 1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Київ, Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.09.77

УДК 539.3

В. А. Осадчук, М. М. Николишин, С. П. Регейло

ВЛИЯНИЕ УПРУГОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

Задача о напряженном состоянии замкнутой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем, ослабленной системой параллельных трещин, сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. При этом упругий наполнитель моделируется основанием Винклера.

Рассмотрим упругое равновесие замкнутой круговой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем, срединная поверхность которой отнесена к линиям кривизны α , β . Пусть в этой оболочке имеется система k параллельных периодически расположенных трещин (разрезов) $|\alpha| \leq \alpha_0$, $\beta = 2n \frac{\pi}{k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{k}{2}$ при k четном, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{k-1}{2}$

при k нечетном. Предположим, что напряженно-деформированное состояние оболочки без трещин осесимметрично и симметрично относительно сечения $\alpha = 0$. В этом случае напряженное состояние оболочки с трещинами будет циклически симметричным, что позволяет в дальнейшем рассматривать циклическую панель $|\beta| \leq \frac{\pi}{k}$ с трещиной $|\alpha| \leq \alpha_0$, $\beta = 0$ (начало координат выбрано посредине трещины).

Воспользовавшись предложенным в работах [4, 8] методом решения задач для оболочек с трещинами, в рассматриваемом случае систему уравнений равновесия оболочки в перемещениях [1] запишем в виде

$$L_{i1}u + L_{i2}v + L_{i3}w = q_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{11} &= \nabla_1^2 + \frac{1-\nu}{2} \nabla_2^2; \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \nabla_1 \nabla_2; \\ L_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \nabla_1^2 + \nabla_2^2 + c_1^2 [2(1-\nu) \nabla_1^2 + \nabla_2^2]; \quad L_{13} = L_{31} = \nu \nabla_1; \\ L_{23} &= L_{32} = \nabla_2 \{1 - c_1^2 [(2-\nu) \nabla_1^2 + \nabla_2^2]\}; \quad L_{33} = 1 + \eta + c_1^2 \nabla^2 \nabla^2; \\ q_1 &= \nu R \nabla_1 \varepsilon_{22}^0; \quad q_2 = R \nabla_2 \varepsilon_{22}^0; \quad q_3 = R \varepsilon_{22}^0 - \frac{h^2}{3} [\nu \nabla_1^2 + \nabla_2^2] \varkappa_{22}^0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\eta = \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \eta'; \quad c_1^2 = \frac{h^2}{3R^2}; \quad \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}; \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial \beta}; \quad \nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^0 &= \varepsilon_2(\alpha) \delta(\beta); \quad \varkappa_{22}^0 = -\frac{1}{R} \varkappa_2(\alpha) \delta(\beta) \quad \text{при } |\alpha| < \alpha_0; \\ \varepsilon_{22}^0 &= \varkappa_{22}^0 = 0 \quad \text{при } |\alpha| \geq \alpha_0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varepsilon_2(\alpha) = \frac{1}{R} (v^+ - v^-); \quad \varkappa_2(\alpha) = \theta_2^+ - \theta_2^-; \quad \delta(\beta) \text{ — функция Дирака; } R,$$

h — соответственно радиус и полутолщина оболочки; ν — коэффициент Пуассона; η' — коэффициент упругого заполнителя; знаки $+$ и $-$ относят значения функций к берегам разрезам $\beta = +0$ и $\beta = -0$ соответственно.

Используя операторный метод [9], решение системы уравнений (1), исчезающее на бесконечности, записываем так:

$$\xi = R (L_{2\xi} \varphi_2 + P_{2\xi} \psi_2) \quad (\xi = u, v, w), \quad (4)$$

где

$$L_{2\xi} = L_{2\xi}^{(1)} + L_{2\xi}^{(2)}; \quad P_{2\xi} = P_{2\xi}^{(1)} + P_{2\xi}^{(2)};$$

$L_{2\xi}^{(1)}$, $P_{2\xi}^{(1)}$ — известные дифференциальные операторы [4];

$$\begin{aligned} L_{2u}^{(2)} &= -(2-\nu) \nabla_1^3 \nabla_2^2 - \nabla_1 \nabla_2^4 - \eta_1 \nu \nabla_1^3 + \eta_1 \nabla_1 \nabla_2^2; \\ P_{2u}^{(2)} &= -(1-\nu^2) c_1^2 \nabla_1^5 \nabla_2^2 - [1 - (1+\nu)^2 \eta_1 c^2] \nabla_1 \nabla_2^2; \\ L_{2v}^{(2)} &= 2(1+\nu)(2-\nu) \nabla_1^4 \nabla_2 + (4+\nu) \nabla_1^2 \nabla_2^3 + \nabla_2^5 - (2+\nu) \eta_1 \nabla_1^2 \nabla_2 - \eta_1 \nabla_2^3; \\ P_{2v}^{(2)} &= 2(1-\nu) c_1^2 \nabla_1^5 \nabla_2 + (1-\nu)^2 c_1^2 \nabla_1^4 \nabla_2^3 + 2(1+\nu)(1-\eta_1 c^2) \nabla_1^2 \nabla_2 + \\ &\quad + (1+\eta) \nabla_2^3; \\ L_{2w}^{(2)} &= (4-\nu^2) \nabla_1^4 \nabla_2^2 + 4 \nabla_1^2 \nabla_2^4 + \nabla_2^6 + 4 \nabla_1^2 \nabla_2^2 + \nabla_2^4; \\ P_{2w}^{(2)} &= -(2+\nu) \nabla_1^2 \nabla_2^2 - \nabla_2^4; \quad c^2 = \frac{c_1^2}{1-\nu^2}, \quad \eta_1 = -\frac{\eta}{c_1^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции $\varphi_2(\alpha, \beta)$, $\psi_2(\alpha, \beta)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_2(\alpha, \beta) &= \frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos kn\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \varepsilon_2(\xi) \Phi_n^0(\xi - \alpha) d\xi, \\ \psi_2(\alpha, \beta) &= -\frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos kn\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \kappa_2(\xi) \Phi_n^0(\xi - \alpha) d\xi.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Phi_0^0(z) &= \frac{c_2^2 |z|^3}{12} - \frac{c_2^3 \sqrt{2c_2}}{4} e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c_2}}} \left(\cos \frac{z}{\sqrt{2c_2}} + \sin \frac{|z|}{\sqrt{2c_2}} \right); \\ \Phi_n^0(z) &= \frac{1}{L_n} \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-a_{in}|z|}}{g_{in}(a_{in}^2 + b_{in}^2)} [(b_{in}C_{in} - a_{in}B_{in}) \cos b_{in}z + \\ &\quad + (a_{in}C_{in} + b_{in}B_{in}) \sin b_{in}|z|] \quad (n \geq 1); \\ \rho_{jn} &= a_{jn}^2 - b_{jn}^2, \quad g_{jn} = 2a_{jn}b_{jn}, \quad C_{1n} = (\rho_{2n} - \rho_{1n})^2 + g_{2n}^2 - g_{1n}^2, \\ &\quad B_{1n} = 2(\rho_{2n} - \rho_{1n})g_{1n}, \\ C_{2n} &= (\rho_{1n} - \rho_{2n})^2 + g_{1n}^2 - g_{2n}^2, \quad B_{2n} = 2(\rho_{1n} - \rho_{2n})g_{2n}, \\ L_n &= 2(C_{1n}^2 + B_{1n}^2) = 2(C_{2n}^2 + B_{2n}^2), \\ \lambda_0 &= \frac{1}{2}, \quad \lambda_n = 1 \quad (n \geq 1), \quad c_2^2 = \frac{c_1^2}{1 + \eta - \nu^2}, \quad z = \xi - \alpha.\end{aligned}$$

Эти функции являются разрешающими функциями задачи и позволяют вычислить напряженное состояние в произвольной точке оболочки, вызванное произвольным распределением скачков перемещений $\varepsilon_2(\alpha)$ и углов поворота $\kappa_2(\alpha)$ вдоль разрезов. Если к найденным величинам усилий и моментов прибавить их значения в оболочке без трещин и потребовать, чтобы суммарные величины удовлетворяли условиям

$$N_2(\alpha, 0) = 0, \quad M_2(\alpha, 0) = 0 \quad \text{для } |\alpha| \leq \alpha_0, \quad (7)$$

для определения производных от функций $\varepsilon_2(\alpha)$, $\kappa_2(\alpha)$ получим систему интегральных уравнений

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 F_i(u) K_{mi}[\alpha_0(u-s)] du = \pi f_{m0}(s), \quad (8)$$

где

$$F_1(u) = \nabla_1 \varepsilon_2(\alpha); \quad F_2(u) = \nabla_1 \kappa_2(\alpha); \quad |s| \leq 1; \quad m = 1, 2;$$

$$f_{10}(s) = \frac{2}{Ehk} N_2^0(s, 0); \quad f_{20} = \frac{2}{EhkRc} M_2^0(s, 0).$$

Ядра системы имеют вид

$$\begin{aligned}K_{mi} &= \frac{a_{mi}}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + K_{mi}^0(z) \quad (i = 1, 2), \\ K_{11}^0(z) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{kz}{\operatorname{sh} kz} - 1 \right) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \\ &\quad - (1 - \eta_1 c^2) \left(1 - e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c_2}}} \cos \frac{z}{\sqrt{2c_2}} \right) \operatorname{sgn} z + \eta_1 c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{L_n} \sum_{i=1}^2 C_{in}^0 m^2 \operatorname{sgn} z + \\ &\quad + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{L_n} \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-a_{in}|z|}}{g_{in}} (A_{in}^{(1)} \cos b_{in}z \operatorname{sgn} z + \right. \\ &\quad \left. + A_{in}^{(2)} \sin b_{in}z) + \frac{1}{2} e^{-kn|z|} \left(\frac{1}{2} knz - \operatorname{sgn} z \right) \right],\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}
K_{12}^0(z) = & -\frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{32} c \left[\left(\frac{k^3 z^3}{\operatorname{sh}^2 \frac{kz}{2} \operatorname{sh} kz} - 4 \right) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + \frac{k^3 z^3}{3 \operatorname{sh}^2 \frac{kz}{2}} \right] + \\
& + \frac{(1-\nu)^2(5+3\nu)}{32} c \left(\frac{k^2 z^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{kz}{2}} - 4 \right) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \\
& - \frac{(1-\nu^2)(11+5\nu)}{16} c \left(-\frac{kz}{\operatorname{sh} kz} - 1 \right) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \nu e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c_2}}} \sin \frac{z}{\sqrt{2c_2}} - \\
& - \eta_1 c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{L_n} \sum_{j=1}^2 C_{jn}^0 m^2 \operatorname{sgn} z + 4c \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn}|z|}}{g_{jn}} \times \right. \\
& \times (D_{jn}^{(1)} \cos b_{jn} z \operatorname{sgn} z + D_{jn}^{(2)} \sin b_{jn} z) + \frac{(1-\nu)^2}{96} e^{-kn|z|} [(1+\nu) k^3 n^3 z^3 - \\
& \left. - 3(5+3\nu) k^2 n^2 z^2 \operatorname{sgn} z + 3(11+5\nu) knz] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22}^0(z) = & -\frac{(1-\nu^2)c_1^2}{32} \left[\left(\frac{k^3 z^3}{\operatorname{sh}^2 \frac{kz}{2} \operatorname{sh} \frac{kz}{2}} - 4 \right) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + \frac{k^3 z^3}{3 \operatorname{sh}^2 \frac{kz}{2}} \right] + \\
& + \frac{(1-\nu)(5+3\nu)c_1^2}{32} \left(\frac{k^3 z^3}{\operatorname{sh}^2 \frac{kz}{2}} - 4 \right) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \\
& - \frac{1-\nu}{16} [8(1-\nu) - (11-\nu)c_1^2] \left(\frac{kz}{\operatorname{sh} kz} - 1 \right) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + \\
& + (\nu^2 + \eta_1 c^2) \left(1 - e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c_2}}} \cos \frac{z}{\sqrt{2c_2}} \right) \operatorname{sgn} z + \eta_1 c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{L_n} \sum_{j=1}^2 C_{jn}^0 m^2 \operatorname{sgn} z + \\
& + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn}|z|}}{g_{jn}} [A_{jn}^{(3)} \cos b_{jn} z \operatorname{sgn} z + A_{jn}^{(4)} \sin b_{jn} z] - e^{-kn|z|} \times \right. \\
& \left. \times \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \right)^2 knz + \frac{1-\nu^2}{2} \operatorname{sgn} z \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{96} c_1^2 e^{-kn|z|} [(1+\nu) k^3 n^3 z^3 - 3(5+3\nu) k^2 n^2 z^2 \operatorname{sgn} z + 3(11-\nu) knz] \right\}
\end{aligned}$$

(ядро $K_{21}^0(z)$ имеет тот же вид, что и ядро $K_{12}^0(z)$, только $D_{jn}^{(1)}$ и $D_{jn}^{(2)}$ заменяются соответственно на $D_{jn}^{(3)}$ и $D_{jn}^{(4)}$),

$$\begin{aligned}
A_{jn}^{(1)} = & t_{jn} E_{jn} - s_{jn} H_{jn} - 2md_{jn} + m^2 E_{jn} - \eta_1 E_{jn} - 2m\eta_1 \frac{2-2\nu+\nu^2}{1-\nu} c^2 B_{jn} - \\
& - \eta_1 m^2 c^2 C'_{jn},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{jn}^{(3)} = & (1-\nu^2)(t_{jn} E_{jn} - s_{jn} H_{jn}) - 2m(1-\nu)(2+\nu-c_1^2) d_{jn} - \\
& - 2(1-\nu) m^3 B_{jn} + (1-\nu)[5+\nu-(1-\nu)c_1^2] m^2 E_{jn} - \\
& - 4(1-\nu)(2+\nu) m E_{jn} + 4(1-\nu) m^2 B_{jn} + \left(\frac{1}{c^2} - \eta_1 \right) E_{jn} - \\
& - 2[(1-\nu)(1+\eta) + \eta_1] m B_{jn} - \eta_1 m^2 C'_{jn},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{jn}^{(1)} = & (1-\nu)^2(2+\nu) m d_{jn} - (1-\nu)^2 m^2 E_{jn} + \frac{\nu}{c^2} d_{jn} - \\
& - \frac{m}{c^2} E_{jn} - (2+\nu) \eta_1 m B_{jn} - \eta_1 m^2 C'_{jn},
\end{aligned}$$

$$D_{jn}^{(3)} = (1 - \nu)^2 (2 + \nu) m d_{jn} - (1 - \nu)^2 m^2 E_{jn} + \frac{\nu}{c^2} d_{jn} - \\ - \left[\frac{1}{c^2} - 2(1 - \nu)(2 + \nu) \right] m E_{jn} - (2 + \nu) \eta_1 m B_{jn} - \eta_1 m^2 C'_{jn}$$

($A_{jn}^{(2)}$, $A_{jn}^{(4)}$, $D_{jn}^{(2)}$, $D_{jn}^{(4)}$) получаем соответственно из $A_{jn}^{(1)}$, $A_{jn}^{(3)}$, $D_{jn}^{(1)}$, $D_{jn}^{(3)}$ путем замены E_{jn} на H_{jn} , H_{jn} на $-E_{jn}$, d_{jn} на r_{jn} , B_{jn} на $-C_{jn}$, C'_{jn} на B'_{jn} ,

$$t_{jn} = p_{jn}^2 - g_{jn}^2, \quad s_{jn} = 2p_{jn}g_{jn}, \quad d_{jn} = s_{jn}C_{jn} + t_{jn}B_{jn}, \quad r_{jn} = s_{jn}B_{jn} - t_{jn}C_{jn},$$

$$E_{jn} = p_{jn}B_{jn} + g_{jn}C_{jn}, \quad H_{jn} = g_{jn}B_{jn} - p_{jn}C_{jn},$$

$$C'_{jn} = -\frac{g_{jn}C_{jn} - p_{jn}B_{jn}}{(a_{jn}^2 + b_{jn}^2)^2} = g_{jn}C_{jn}^0, \quad B'_{jn} = \frac{p_{jn}C_{jn} + g_{jn}B_{jn}}{(a_{jn}^2 + b_{jn}^2)^2} = g_{jn}B_{jn}^0,$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{(1 - \nu)^2 (3 + \nu)}{8} c, \quad a_{22} = (1 - \nu)(3 + \nu) - \\ - \frac{1 - \nu}{8} (3 - \nu) c_1^2, \quad m = \frac{1}{k^2 n^2}.$$

Здесь a_{jn} и b_{jn} — соответственно мнимая и действительная части корня характеристического уравнения

$$y^8 + 4y^6 + \left[6 - (8 - 2\nu^2)m + \frac{1}{c^2} (1 - \eta_1 c^2) m^2 \right] y^4 + \\ + 2[2 - 4m + 2(1 + \eta)m^2 + \eta_1 m^2] y^2 + 1 - 2m + (1 + \eta + \eta_1) m^2 = 0.$$

Функции $K_{im}^0(z)$ непрерывны для всего множества действительных значений u и s .

Вводя новые переменные τ и t , систему уравнений (1) представим в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{G(t)}{1 - \lambda^2 t^2}, \quad |t| \leq 1 \quad (m = 1, 2), \quad (10)$$

где

$$\Omega_m(t) = \frac{a_{m1} F_1(t) + a_{m2} R_c F_2(t)}{1 - \lambda^2 t^2}; \quad G(t) = k f_m^-(t, 0) - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 \Omega_i(\tau) \Psi_{mi}(\tau, t) d\tau;$$

$$\Psi_{11}(\tau, t) = \frac{1}{\Delta} (a_{22} K_{11}^0 - a_{21} K_{12}^0); \quad \Psi_{12}(\tau, t) = \frac{1}{\Delta} (a_{11} K_{12}^0 - a_{12} K_{11}^0);$$

$$\Psi_{21}(\tau, t) = \frac{1}{\Delta} (a_{22} K_{21}^0 - a_{21} K_{22}^0); \quad \Psi_{22}(\tau, t) = \frac{1}{\Delta} (a_{11} K_{22}^0 - a_{12} K_{21}^0);$$

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2; \quad f_m(t, 0) = f_{m0}[\omega(t, 0), 0]; \quad \lambda = \text{th} \frac{k\alpha_0}{2};$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \text{th} \frac{k\alpha_0 u}{2}; \quad t = \frac{1}{\lambda} \text{th} \frac{k\alpha_0 s}{2}; \quad \omega = \omega(\tau, t) = \frac{2}{k} \text{Arth} \frac{\lambda(\tau - t)}{1 - \lambda^2 \tau t}.$$

Воспользовавшись при решении системы (8) прямым методом решения сингулярных интегральных уравнений, предложенным в работе [3], для определения коэффициентов интенсивности усилий N_2 и моментов M_2 [5] получим формулы

$$k_1^* = \frac{1}{2} N_2^0 \sqrt{R\alpha_0} \sum_{j=1}^{n/2} A_{2j-1}, \quad k_2^* = \frac{1}{2} N_2^0 R_c \sqrt{R\alpha_0} \sum_{j=1}^{n/2} B_{2j-1},$$

где

$$A_{2j-1} = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \varphi_v^{(1)} \cos(2j-1)\theta_v; \quad B_{2j-1} = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \varphi_v^{(2)} \cos(2j-1)\theta_v;$$

$\Phi_v^{(1)}, \Phi_v^{(2)}$ найдем, решая систему n алгебраических уравнений

$$\sum_{v=1}^{n/2} (\alpha_{mv}\Phi_v^{(1)} + \beta_{mv}\Phi_v^{(2)}) = 1,$$

$$\sum_{v=1}^{n/2} (\bar{\beta}_{mv}\Phi_v^{(1)} + \bar{\alpha}_{mv}\Phi_v^{(2)}) = k^*, \quad m = 1, \dots, n/2.$$

Здесь

$$\alpha_{mv} = \frac{1}{2n} [\Psi_{mv} + \Psi_{11}^0(z_2) - \Psi_{11}^0(z_1)]; \quad \bar{\alpha}_{mv} = \frac{1}{2n} [\Psi_{mv} + \Psi_{22}^0(z_2) - \Psi_{22}^0(z_1)]$$

$$\beta_{mv} = \frac{1}{2n} [\Psi_{12}^0(z_2) - \Psi_{12}^0(z_1)]; \quad \bar{\beta}_{mv} = \frac{1}{2n} [\Psi_{21}^0(z_2) - \Psi_{21}^0(z_1)];$$

$$\Psi_{mv} = \frac{1}{\sin \theta_m} \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2} \right]; \quad k^* = \frac{M_2^0}{RcN_2^0}; \quad \theta_i = \frac{2i-1}{2n} \pi,$$

$$(i = m, v);$$

$$\Psi_{11}^0(z) = k\alpha_0 \left[\frac{1}{kz} - \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \Psi_{11}(z) \right]; \quad \Psi_{12}^0(z) = -k\alpha_0 \Psi_{12}(z);$$

$$\Psi_{21}^0(z) = -k\alpha_0 \Psi_{21}(z); \quad \Psi_{22}^0(z) = k\alpha_0 \left[\frac{1}{kz} - \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \Psi_{22}(z) \right],$$

$$z_1 = \alpha_0 (\cos \theta_m + \cos \theta_v), \quad z_2 = \alpha_0 (\cos \theta_m - \cos \theta_v).$$

На рис. 1, 2 показано изменение относительных коэффициентов интенсивности $k_1 = k_1^*/\sqrt{R\alpha_0 N_2^0}$ и $k_2 = k_2^*/Rc\sqrt{R\alpha_0 N_2^0}$ соответственно в зависи-

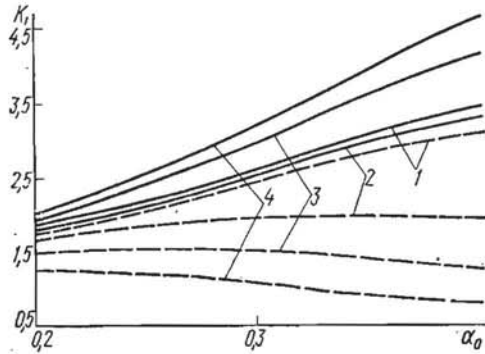


Рис. 1

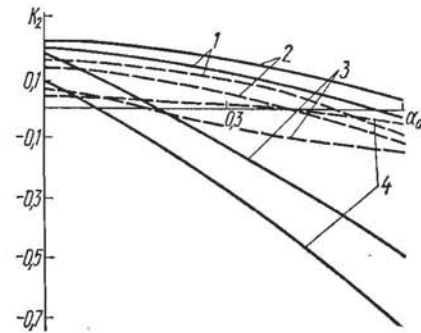


Рис. 2

мости от длины трещин и их количества. Численный анализ произведен при следующих значениях параметров: $R = 0,15$ м; $h = 0,15 \cdot 10^{-2}$ м; $\nu = 0,3$; $\eta = 0,01$ (сплошные линии); $\eta = 0,1$ (штриховые линии). Кривые 1 — 4 соответствуют значениям параметров $k = 1; 5; 12; 24$. Как видно из графиков, при увеличении жесткости упругого заполнителя величина коэффициентов интенсивности уменьшается. Следует отметить, что при малых значениях параметра η существует такое количество трещин, при котором коэффициент интенсивности мембранных усилий k_1 принимает наименьшее значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды. М., Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 524 с.
2. Даревский В. М. Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки.— Прикл. математика и механика, 1952, 16, № 2, с. 159—194.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., Наука, 1973. 303 с.
4. Осадчук В. А., Подстригач Я. С. К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами.— Механика твердого тела, 1973, № 3, с. 69—78.

5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, Наук. думка, 1976. 440 с.
6. Подстригач Я. С., Осадчук В. А. К определению напряженного состояния тонких оболочек с учетом деформаций, обусловленных физико-химическими процессами.— Физ.-хим. механика материалов, 1968, 4, № 2, с. 218—224.
7. Подстригач Я. С., Осадчук В. А. Исследование напряженного состояния цилиндрических оболочек, обусловленного заданным тензором несовместных деформаций, и его приложения к определению сварочных напряжений.— Физ.-хим. механика материалов, 1968, 4, № 4, с. 400—407.
8. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.
9. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Київ, Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
10.10.77

УДК 539.377

И. М. Зашкильняк, Г. С. Кит, В. С. Колесов, И. И. Федик

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДИСКА С КРУГОВЫМИ ТЕПЛОЫДЕЛЯЮЩИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В настоящее время важное значение для практики имеет исследование термоупругого состояния тепловыделяющих элементов. Распределение напряжений в композите с тепловыделяющими включениями, его прочность и характер разрушения зависят от многих факторов, в том числе от физико-механических и теплофизических характеристик материала включений и связующего, а также от интенсивности тепловыделения включений.

Если тепловыделяющие включения, наполняющие матрицу, расположены неравномерно и близко друг к другу, то температурные поля и поля напряжений взаимодействуют, вследствие чего возникают большие трудности при анализе напряженного состояния даже в случае плоской задачи. Эти трудности увеличиваются еще вследствие большого количества параметров, которые необходимо учитывать при расчете (отношение модулей упругости, коэффициентов Пуассона, теплопроводности и линейного расширения материалов, плотность источников тепла, геометрические характеристики композита, включений и их расположения). В то же время в случае композита, представляющего собой цилиндр с круговыми включениями, когда материал матрицы и включений имеет одинаковые характеристики, за исключением коэффициента теплового расширения, можно получить точное решение задачи и сделать некоторые выводы, относящиеся к полям напряжений в матрице и включениях.

Рассмотрим упругий диск радиуса R с n впаянными включениями радиусов r_j ($j = \overline{1, n}$). Выберем декартову систему координат xOy с началом в центре диска и введем комплексную переменную $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$. Область, занятую j -м включением, обозначим через S_j , область матрицы — через S_0 , координату центра j -го включения — через z_j . В дальнейшем все величины с индексом j будут относиться к j -му включению, а с индексом 0 — к матрице. Контуры спая обозначим через γ_j , границу диска — через Γ .

Предположим, что материалы включений и матрицы имеют разные коэффициенты линейного теплового расширения, а остальные физико-механические характеристики у них одинаковы. Включения выделяют тепло с постоянной интенсивностью W_j . На линиях спая имеют место условия идеального теплового и механического контакта, граница диска поддерживается при постоянной температуре T^* и свободна от внешних усилий.