УДК 517.53

Ю. Р. Гайда

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Исследуем распределение значений для функций вида $R(u(z))$, где $R(u)$ — рациональная, а $u(z)$ — мероморфная в конечной плоскости функции, используя стандартные обозначения теории распределения значений [1, 2], а также выражение

$$\Theta(a) = 1 - \lim_{r\to\infty} \frac{\overline{N}(r, a)}{T(r)}.$$

Известно, что если $R(u)$ — рациональная функция степени d, то [2]

$$T(r, R(u(z))) = dT(r, u(z)) + O(1). \tag{1}$$

Теорема 1. Пусть $R(u)$ — рациональная функция степени d, $u(z)$ — мероморфная функция, $f(z) = R(u(z))$. Тогда

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) \geqslant \frac{1}{d} \sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}} \delta(b, u), \tag{2}$$

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}} \Theta(a, f) \geqslant \frac{1}{d} [2d - 2 + \sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}} \Theta(b, u)]. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим через $\xi_1(a), \ldots, \xi_l(a)$, $a\in\overline{\mathbb{C}}$ все различные a-точки в $\overline{\mathbb{C}}$ для функции $R(u)$ $(l \geqslant d)$, а через $\psi_{1,j}(a), \ldots, \psi_{m_i(r),i}(a)$ — все различные $\xi_i(a)$-точки для функции $u(z)$ в круге $\{|z| \leqslant r\}$. Для произвольной мероморфной функции $F(z)$ через $\mu(a, F)$ обозначим кратность точки a, т. е. число раз, с каким $F(z)$ принимает значение $F(a)$ в точке a. Используя введенные обозначения, получаем

$$\begin{gathered} n(r, a f) = \sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R)\, n(r, \xi_i(a), u), \\ N(r, a, f) = \sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R)\, N(r, \xi_i(a), u); \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} n_1(r, a, f) &= \sum_{i=1}^{l} \left\{ \sum_{j=1}^{m_i(r)} [\mu(\xi_i(a), R)\, \mu(\psi_{j,i}(a), u) - 1] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{l} \left[\sum_{j=1}^{m_i(r)} \mu(\xi_i(a), R)\, \mu(\psi_{j,i}(a), u) - m_i(r) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{l} \left[\mu(\xi_i(a), R) \sum_{j=1}^{m_i(r)} \mu(\psi_{j,i}(a), u) - m_i(r) \right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидны такие равенства:

$$\sum_{j=1}^{m_i(r)} \mu(\psi_{j,i}(a), u) = n(r, \xi_i(a), u), \quad m_i(r) = \overline{n}(r, \xi_i(a), u).$$

Подставляя их в (5), получаем

$$\begin{aligned} n_1(r, a, f) &= \sum_{i=1}^{l} [\mu(\xi_i(a), R)\, n(r, \xi_i(a), u) - \overline{n}(r, \xi_i(a), u)] = \\ &= \sum_{i=1} [\mu(\xi_i(a), R)\, n(r, \xi_i(a), u) - n(r, \xi_i(a), u) + n_1(r, \xi_i(a), u)] = \\ &= \sum_{i=1}^{l} [\mu(\xi_i(a), R) - 1]\, n(r, \xi_j(a), u) + \sum_{i=1}^{l} n_1(r, \xi_i(a), u). \end{aligned}$$

Отсюда

$$N_1(r, a, f) = \sum_{i=1}^{l} [\mu(\xi_i(a), R) - 1] N(r, \xi_i(a), u) + \sum_{i=1}^{l} N_1(r, \xi_i(a), u). \quad (6)$$

Согласно первой основной теореме теории Неванлинны

$$m(r, a, f) = T(r, f) - N(r, a, f) + O(1). \quad (7)$$

Подставляя выражения (1), (4) в (7) и используя первую основную теорему Неванлинны и тождество

$$\sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R) = d,$$

получаем

$$m(r, a, f) = \sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R)[T(r, u) - N(r, \xi_i(a), u)] + O(1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R)\, m(r, \xi_i(a), u) + O(1). \quad (8)$$

Следовательно,

$$\frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} = \frac{1}{dT(r, u)} \sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R)\, m(r, \xi_i(a), u) + O(1) =$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R) \frac{m(r, \xi_i(a), u)}{T(r, u)} + O(1). \quad (9)$$

Переходя здесь к нижнему пределу, получаем

$$\delta(a, f) \geqslant \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R)\, \delta(\xi_i(a), u) \geqslant \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{l} \delta(\xi_i(a), u). \quad (10)$$

Суммируя (10) по всем $a \in \overline{\mathbb{C}}$, получаем (2). Из равенства (6) следует, что

$$N_1(r, a, f) = \sum_{i=1}^{l} [\mu(\xi_i(a), R) - 1][T(r, u) - m(r, \xi_i(a), u)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} N_1(r, \xi_i(a), u) + O(1) = \sum_{i=1}^{l} [\mu(\xi_j(a), R) - 1] T(r, u) -$$

$$- \sum_{i=1}^{l} \mu(\xi_i(a), R)\, m(r, \xi_i(a), u) + \sum_{i=1}^{l} m(r, \xi_i(a), u) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} N_1(r, \xi_i(a), u) + O(1). \quad (11)$$

Сложим равенства (8) и (11). Получим

$$m(r, a, f) + N_1(r, a, f) = \sum_{i=1}^{l} [\mu(\xi_i(a), R) - 1] T(r, u) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} [m(r, \xi_i(a), u) + N_1(r, \xi_i(a), u)] + O(1). \quad (12)$$

Разделим обе части (12) на $T(r, f)$ и перейдем к нижнему пределу, учитывая (1):

$$\Theta(a, f) \geqslant \frac{1}{d} \left\{ \sum_{i=1}^{l} [\mu(\xi_i(a), R) - 1] + \sum_{i=1}^{l} \Theta(\xi_i(a), u) \right\}. \quad (13)$$

Просуммируем теперь выражение (13) для всех $a \in \overline{\mathbb{C}}$, используя то, что

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \sum_{i=1}^{l} [\mu(\xi_i(a), R) - 1] = 2d - 2$$

(см., например, [1]). Получим неравенство (3). Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $u(z)$ такая, что все нижние пределы, о которых идет речь в определениях величин $\delta(a, u)$, $\varepsilon(a, u)$, существуют как обыкновенные пределы, неравенства (2), (3) можно заменить соотношениями

$$\frac{1}{d}\sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}}\delta(b, u)\leqslant\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\delta(a, f)\leqslant\sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}}\delta(b, u), \tag{2'}$$

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}[\delta(a, f)+\varepsilon(a, f)]=\frac{1}{d}\left\{2d-2+\sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}}[\delta(b, u)+\varepsilon(b, u)]\right\}. \tag{3'}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, из равенства (8) получаем

$$\delta(a, f)=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{l}\mu(\xi_i(a), R)\,\delta(\xi_i(a), u).$$

Отсюда

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\delta(a, f)=\frac{1}{d}\sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}}\mu(b, R)\,\delta(b, u) \tag{14}$$

и неравенства (2') следуют непосредственно из (14). Аналогично получаем равенство (3) из (12).

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $d\geqslant 2$. Тогда

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(a, f)\geqslant\sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(b, u), \tag{15}$$

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(a, f)\geqslant 1, \tag{16}$$

причем равенство в (15) достигается тогда и только тогда, когда $\sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(b, u)=2$.

Доказательство. Обозначим левую сумму в (15) через S_f, а правую — через S_u. Согласно неравенству (3) получаем

$$S_f-S_u\geqslant\frac{1}{d}[2d-2+S_u]-S_u=\frac{1}{d}[2(d-1)-S_u(d-1)]=$$
$$=\frac{d-1}{d}[2-S_u]\geqslant 0,$$

ибо по второй основной теореме $S_u\leqslant 2$. Равенство, очевидно, имеет место только при условии $S_u=2$. Далее, поскольку $d\geqslant 2$, то $(2d-2)/d\geqslant 1$, и неравенство (16) следует из неравенства (3).

Теоремы 1 и 2 дают в некоторых случаях ответ на вопрос о возможности представления мероморфной функции в виде композиции рациональной и мероморфной функций. Приведем несколько примеров.

1. Пусть $u_1(z)$, $u_2(z)$ — мероморфные функции, для которых

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(a, u_1)=\sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(b, u_2)<2.$$

Тогда ни одна из них не представляется в виде композиции рациональной функции, отличной от дробно-линейной, и другой функции.

В самом деле, если бы, например, $u_1(z)=R(u_2(z))$, $\deg R(u)=d\geqslant 2$, то согласно (15) было бы $\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(a, u_1)>\sum_{b\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(b, u_2)$.

2. Если $f(z)$ — мероморфная функция, для которой $\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(a, f)<1$, то не существует таких рациональной $R(u)$ степени, большей единицы, и мероморфной $u(z)$ функций, чтобы $f(z)=R(u(z))$.

3. Пусть $\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}} \Theta(a, f) < t$, $1 \leqslant t < 2$ для некоторой мероморфной функции $f(z)$. Тогда существует $d_0 \in N$ такое, что $f(z)$ не представляется в виде композиции рациональной функции степени, большей d_0, и мероморфной функции. Действительно, из неравенства (3) имеем $\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}} \Theta(a, f) \geqslant 2 - \frac{2}{d}$, откуда следует, что не могут выполняться неравенства $2 - \frac{2}{d} \geqslant t$, $d \geqslant \frac{2}{2-t}$. Значит, достаточно взять $d_0 = \left[\frac{2}{2-t}\right]$.

Аналогичные следствия можно получить из неравенства (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз, 1960. 319 с.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 582 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
07.02.77

УДК 536.12 : 539.377

В. М. Вигак

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИИ НАГРЕВОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Температурные напряжения, возникающие в элементах конструкций при нестационарных температурных режимах, как известно [23, 30, 31, 34, 42], могут приводить к разрушению, и для гарантии расчетного срока службы конструкции необходимо в первую очередь для наиболее массивных деталей ограничивать интенсивность нагрева и охлаждения так, чтобы не превысить предельно допустимые напряжения. С другой стороны, из опыта известно, что в большинстве случаев наиболее выгодным и технологически оправданным переходным нестационарным температурным режимом работы установки является тот, который осуществляется за минимальный промежуток времени [43, 45]. Так, для современного этапа развития энергетики характерно стремление к повышению маневренности, снижению экономических затрат и автоматизации управления пусковыми режимами теплоэнергоблоков, что особенно важно в связи с переводом блоков на работу в режиме частых пусков и остановок для покрытия переменной части графиков нагрузки энергосистем. Это обстоятельство выдвигает на первый план проблему оптимизации по быстродействию нестационарных тепловых режимов для элементов энергооборудования при различных ограничениях, в частности при ограничениях на управление (температуру либо расход греющей среды, тепловой поток) и термоупругие напряжения.

Если величина предельно допустимых температурных напряжений для соответствующей детали установлена и не превышает предела упругости, то для определения оптимального по быстродействию нестационарного одномерного температурного режима можно использовать различные методы.

Наиболее простым, широко применяемым на практике является приближенный метод определения допустимого температурного режима, который заключается в решении обычной задачи теплопроводности и термоупругости с последующим сравнением найденных температурных напряжений с допустимыми [2, 8, 18, 20, 21, 35, 40, 44, 46, 47]. Такой подход, как правило, дает возможность определить допустимую величину характерных парамет-