Для этого разложения характеристического многочлена не существует параллельного разложения матричного многочлена $A(x)$.

Действительно, поскольку для каждого корня α_i многочлена $\det A_1(x)$ $\operatorname{rang} A_{1*}(\alpha_i) = 1$, то

$$\operatorname{rang} M_{A_{1*}(x)}(\varphi) \leqslant r < n_1,$$

где $\varphi(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_r)$. Учитывая вид матрицы (13), получаем, что первые n_1 столбцов матрицы $M_{(TA(x)T^{-1})_*}(\Delta_1)$ линейно зависимы. Отсюда следует, что

$$\operatorname{rang} M_{(TA(\lambda)T^{-1})_*}(\Delta_1) = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta_1) < n,$$

т. е. матричный многочлен $A(x)$ не является абсолютно разложимым. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Утверждение, обратное к теореме 3, неверно. Действительно, матричный трехчлен

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} x^2 + \frac{1}{7}\begin{Vmatrix} -15 & 3 & -3 \\ 8 & -3 & 3 \\ -8 & -4 & -3 \end{Vmatrix} x + \frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 6 \\ 0 & -4 & -34 \end{Vmatrix}$$

преобразованием подобия не приводится к клеточно-треугольному виду. Это нетрудно проверить, используя критерий приводимости из работы [6]. В то же время для разложения характеристического многочлена

$$\Delta(x) = \Delta_1(x)\,\Delta_2(x), \quad \Delta_1(x) = x(x+1)(x-3)$$

не существует параллельного разложения трехчлена $A(x)$ на линейные унитальные множители, т. е. трехчлен $A(x)$ не является абсолютно разложимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варден Б. Л. ван дер.* Алгебра. М., Наука, 1976. 648 с.
2. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев, 1976, с. 29—40.
3. *Казімірський П. С.* Про розклад поліноміальної матриці на лінійні множники.— Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1965, вип. 8, с. 53—60.
4. *Казимирский П. С.* Разложение регулярного матричного многочлена на множители.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 6, с. 488—491.
5. *Казимирский П. С.* О разложении матричного многочлена на множители.— Укр. мат. журн., 1972, 24, № 3, с. 316—327.
6. *Казимирский П. С., Грынив Л. М.* Приведение регулярного матричного многочлена к квазидиагональному виду.— Укр. мат. журн., 1974, 26, № 3, с. 318—327.
7. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні й прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. Київ, 1977, с. 61—66.
8. *Петричкович В. М., Шуляр М. А.* Об абсолютной разложимости матричного квадратного трехчлена.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 188—190.
9. *Dennis J. E., Traub J. F., Weber R. P.* The algebraic theory of matrix polynomials.— SIAM J. Numer. Anal., 1976, 13, N 6, p. 831—845.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.12.77

УДК 512.8

Б. З. Шаваровский

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ И ПОДОБИЕ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим регулярный матричный пучок первой степени $A_0\lambda + A_1$, где A_0, A_1 — квадратные $n \times n$-матрицы над C (C — поле комплексных чисел); $\lambda \in C$ и $|A_0| \neq 0$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа этого пучка (не обязательно различны). Строку $\overline{r}_i = \| r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in} \|$ будем называть левым характеристическим вектором пучка $A_0\lambda + A_1$, если $\overline{r}_i (A_0\lambda_i + A_1) = \overline{0}$ ($\overline{0} = \| 0, 0, \ldots, 0 \|$), и соответственно строку $\overline{q}_i = \| q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in} \|$ будем называть правым характеристическим вектором указанного пучка, если $(A_0\lambda_i + A_1)\, \overline{q}_i^T = \overline{0}^T$ (T — операция транспонирования). Введем следующие обозначения: $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$; R — $n \times n$-матрица, составленная из линейно независимых левых характеристических векторов и по необходимости дополненная нулевыми строками; Q — $n \times n$-матрица, составленная из линейно независимых правых характеристических векторов и так же, как и матрица R, дополненная до квадратной нулевыми строками. Строки в матрицах R и Q расположены соответственно следованию характеристических чисел на главной диагонали в матрице Λ. В случае регулярного пучка простой структуры (все элементарные делители которого линейны) матрицы R и Q согласно теореме 2.1 работы [2] могут быть определены так, что

$$RA_0Q^T = E, \quad RA_1Q^T = -\Lambda \tag{1}$$

(E — единичная матрица).

Пучки

$$A_0\lambda + A_1, \quad B_0\lambda + B_1 \tag{2}$$

называем подобными, если существует неособенная числовая матрица P такая, что

$$A_0\lambda + A_1 = P^{-1}(B_0\lambda + B_1)\,P.$$

Из подобия пучков (2) следует подобие пар (A_0, A_1) и (B_0, B_1), т. е.

$$A_0 = P^{-1}B_0P, \quad A_1 = P^{-1}B_1P.$$

Теорема 1. Регулярные пучки (2) простой структуры подобны тогда и только тогда, когда существуют матрицы R_1, Q_1 и R_2, Q_2, составленные согласно (1) из левых и правых характеристических векторов первого и второго пучков соответственно, такие, что

$$R_1Q_1^T = R_2Q_2^T, \tag{3}$$

причем преобразующая матрица $P = R_2^{-1}R_1 = Q_2^T\,(Q_1^T)^{-1}$.

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме 2.1 работы [2] существуют матрицы R_1 и Q_1, составленные соответственно из левых и правых характеристических векторов первого пучка, удовлетворяющие условию

$$R_1(A_0\lambda + A_1)\,Q_1^T = E\lambda - \Lambda.$$

Учитывая подобие пучков (2), получаем

$$R_1P^{-1}(B_0\lambda + B_1)\,PQ_1^T = E\lambda - \Lambda,$$

следовательно, как нетрудно убедиться, матрица $R_2 = R_1P^{-1}$ составлена из левых, а матрица $Q_2 = Q_1P^T$ — из правых характеристических векторов второго пучка и $R_2Q_2^T = R_1Q_1^T$.

Достаточность. Пусть теперь для пучков (2) существуют матрицы R_1, Q_1 и R_2, Q_2, составленные согласно (1) из левых и правых характеристических векторов первого и второго пучков соответственно, т. е.

$$R_1(A_0\lambda + A_1)\,Q_1^T = E\lambda - \Lambda, \tag{4}$$

$$R_2(B_0\lambda + B_1)\,Q_2^T = E\lambda - \Lambda, \tag{5}$$

для которых имеет место условие (3). Приравнивая левые части равенств (4) и (5), получаем

$$R_1(A_0\lambda + A_1)\,Q_1^T = R_2(B_0\lambda + B_1)\,Q_2^T$$

или

$$A_0\lambda + A_1 = R_1^{-1}R_2(B_0\lambda + B_1)Q_2^T(Q_1^T)^{-1}.$$

Учитывая условие (3), имеем

$$A_0\lambda + A_1 = P^{-1}(B_0\lambda + B_1)P,$$

т. е. пучки (2) подобны. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим регулярный пучок

$$A_l(\lambda) = A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \cdots + A_l$$

степени $l > 1$, где $A_0, A_1, \ldots, A_l$ — $n \times n$-матрицы над C; $|A_0| \neq 0$. Построим ему соответствующий ассоциированный пучок

$$\mathcal{A}_0\lambda + \mathcal{A}_1 =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & \ldots & A_0 & A_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_0 & \ldots & A_{l-3} & A_{l-2} \\ A_0 & A_1 & \ldots & A_{l-2} & A_{l-1} \end{Vmatrix} \lambda + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -A_0 & -A_1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_0 & -A_1 & \ldots & -A_{l-3} & -A_{l-2} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & A_l \end{Vmatrix}.$$

Известно [2], что характеристические числа этих пучков совпадают (обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{ln}$), из простоты первого из них следует простота второго, и наоборот.

Аналогично понятиям характеристических векторов пучка первой степени строку $\overline{u_i}$ будем называть левым характеристическим вектором пучка $A_l(\lambda)$, если $\overline{u_i}A_l(\lambda_i) = \overline{0}$, а строку $\overline{v_i}$ — правым характеристическим вектором этого же пучка, если $A_l(\lambda_i)\overline{v_i}^T = \overline{0}^T$. Обозначим через U $ln \times n$-матрицу, составленную из левых характеристических векторов, и через V — $ln \times n$-матрицу, составленную из правых характеристических векторов рассматриваемого пучка, причем те строки этих матриц, которые являются характеристическими векторами, соответствующими одному и тому же характеристическому числу, линейно независимы. Разумеется, матрицы U и V заполнены по необходимости нулевыми строками. В случае регулярного пучка простой структуры эти матрицы можно определить так, что

$$\|\Lambda_{ln}^{l-1}U, \ldots, \Lambda_{ln}U, U\|\mathcal{A}_0\|\Lambda_{ln}^{l-1}V, \ldots, \Lambda_{ln}V, V\|^T = E_{ln}, \tag{6}$$

$$\|\Lambda_{ln}^{l-1}U, \ldots, \Lambda_{ln}U, U\|\mathcal{A}_1\|\Lambda_{ln}^{l-1}V, \ldots, \Lambda_{ln}V, V\|^T = -\Lambda_{ln}, \tag{7}$$

где E_{ln} — единичная $ln \times ln$-матрица, а $\Lambda_{ln} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{ln})$. Характеристические векторы пучка $A_l(\lambda)$ в матрицах U и V расположены так, как характеристические числа λ_i на главной диагонали в матрице Λ_{ln}.

Пусть

$$A_l(\lambda) = A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \cdots + A_l, \quad B_l(\lambda) = B_0\lambda^l + B_1\lambda^{l-1} + \cdots + B_l \tag{8}$$

— регулярные пучки простой структуры, а $\mathcal{A}_0\lambda + \mathcal{A}_1$ и $\mathcal{B}_0\lambda + \mathcal{B}_1$ — им соответствующие ассоциированные пучки. Легко показать, что из подобия первых следует подобие вторых, и наоборот, а на основании теоремы 1 справедлива такая теорема.

Теорема 2. Регулярные пучки простой структуры (8) подобны тогда и только тогда, когда существуют матрицы U_1, V_1 и U_2, V_2, составленные согласно (6), (7) из левых и правых характеристических векторов первого и второго пучков соответственно, такие, что

$$\|\Lambda_{ln}^{l-1}U_1, \ldots, \Lambda_{ln}U_1, U_1\|\|\Lambda_{ln}^{l-1}V_1, \ldots, \Lambda_{ln}V_1, V_1\|^T =$$
$$= \|\Lambda_{ln}^{l-1}U_2, \ldots, \Lambda_{ln}U_2, U_2\|\|\Lambda_{ln}^{l-1}V_2, \ldots, \Lambda_{ln}V_2, V_2\|^T,$$

причем преобразующая матрица $P = R_2^{-1}R_1 = Q_2^T\,(Q_1^T)^{-1}$, где

$$\mathcal{R}_k = \| \Lambda_{ln}^{l-1}U_k,\ \ldots,\ \Lambda_{ln}U_k,\ U_k \|,$$

$$Q_k = \| \Lambda_{ln}^{l-1}V_k,\ \ldots,\ \Lambda_{ln}V_k,\ V_k \| \qquad (k = 1,\ 2).$$

Пусть, наконец, $A_2(\lambda) = A_0\lambda^2 + A_1\lambda + A_2$ и $B_2(\lambda) = B_0\lambda^2 + B_1\lambda + B_2$ — регулярные пучки простой структуры, характеристические многочлены которых равны; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ — характеристические числа этих пучков. Следующая теорема дает условие подобия таких пучков в связи с разложением их на множители.

Теорема 3. Для подобия регулярных пучков простой структуры $A_2(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали матрицы R_{11}, Q_{12} и R_{12}, Q_{22}, составленные из n линейно независимых левых и n линейно независимых правых характеристических векторов первого и второго пучков соответственно, для которых возможно разложение

$$A_2(\lambda) = (E\lambda - R_{11}^{-1}\Lambda_1 R_{11})\,A_0\,(E\lambda - (Q_{12}^{-1}\Lambda_2 Q_{12})^T), \tag{9}$$

$$B_2(\lambda) = (E\lambda - R_{21}^{-1}\Lambda_1 R_{21})\,B_0\,(E\lambda - (Q_{22}^{-1}\Lambda_2 Q_{22})^T), \tag{10}$$

где $\Lambda_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$; $\Lambda_2 = \operatorname{diag}(\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{2n})$;

$$R_{11}A_0Q_{12}^T = R_{21}B_0Q_{22}^T; \tag{11}$$

$$R_{11}Q_{12}^T = R_{21}Q_{22}^T. \tag{12}$$

Доказательство. Необходимость. Согласно [1], фиксируем разложение (10). Поскольку пучки $A_2(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$ подобны, т. е. $A_2(\lambda) = P^{-1}B_2(\lambda)\,P$, то

$$A_2(\lambda) = P^{-1}\,(E\lambda - R_{21}^{-1}\Lambda_1 R_{21})\,B_0\,(E\lambda - (Q_{22}^{-1}\Lambda_2 Q_{22})^T)\,P =$$

$$= (E\lambda - (R_{21}P)^{-1}\,\Lambda_1\,(R_{21}P))\,A_0\,(E\lambda - (P^TQ_{22}^{-1}\Lambda_2 Q_{22}\,(P^{-1})^T)^T).$$

Нетрудно убедиться, что строки матрицы $R_{11} = R_{21}\,P$ суть линейно независимые левые характеристические векторы пучка $A_2(\lambda)$, а строки матрицы $Q_{12} = Q_{22}\,(P^{-1})^T$ — линейно независимые правые характеристические векторы этого пучка, следовательно,

$$R_{11}Q_{12}^T = R_{21}Q_{22}^T \text{ и } R_{11}A_0Q_{12}^T = R_{21}B_0Q_{22}^T.$$

Достаточность. Из соотношений (9), (10) можно записать

$$R_{11}A_2(\lambda)\,Q_{12}^T = (E\lambda - \Lambda_1)\,R_{11}A_0Q_{12}^T\,(E\lambda - \Lambda_2),$$

$$R_{21}B_2(\lambda)\,Q_{22}^T = (E\lambda - \Lambda_1)\,R_{21}B_0Q_{22}^T\,(E\lambda - \Lambda_2).$$

Учитывая (11), получаем

$$R_{11}A_2(\lambda)\,Q_{12}^T = R_{21}B_2(\lambda)\,Q_{22}^T,$$

откуда

$$A_2(\lambda) = R_{11}^{-1}R_{21}B_2(\lambda)\,Q_{22}^T\,(Q_{12}^T)^{-1}.$$

Так как из (12) следует, что $(R_{11}^{-1}R_{21})^{-1} = Q_{22}^T\,(Q_{12}^T)^{-1} = P$, то $A_2(\lambda) = P^{-1}B_2(\lambda)\,P$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Если пучки $A_2(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$ унитальны, т. е. $A_0 = B_0 = E$, то, как легко видеть, условия (11), (12) совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев, 1976, с. 29—40.
2. *Lancaster P.* Lambda-matrices and vibrating systems. Oxford, Pergamon press, 1966. 196 p.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.05.77