3. *Крейн М. Г., Неймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. Харьков, ДНТВУ, 1936. 44 с.
4. *Ландер Ф. И.* Безутиаита и обращение ганкелевых и теплицевых матриц.—Мат. исслед., 1974, 32, № 2, с. 173—179.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 11.12.77

УДК 512.8

В. М. Петричкович

АБСОЛЮТНАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть задан унитальный матричный многочлен

$$A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m, \tag{1}$$

где A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — $n \times n$-матрицы над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль; E — единичная матрица. Многочлен $\Delta(x) = \det A(x)$ называем характеристическим многочленом, а корни $\Delta(x)$ — характеристическими числами матричного многочлена (1).

Определение. Если для любого разложения *

$$\Delta(x) = \Delta_1(x)\,\Delta_2(x)\,\ldots\,\Delta_m(x), \tag{2}$$

$\deg \Delta_i = n$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) характеристического многочлена существует параллельное разложение

$$A(x) = B_1(x)\,B_2(x)\,\ldots\,B_m(x)$$

на линейные унитальные множители матричного многочлена (1), т. е. такое разложение, что $\det B_i(x) = \Delta_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), то матричный многочлен (1) будем называть абсолютно разложимым.

Очевидно, что если матричный многочлен $A(x)$ разложим на линейные унитальные множители параллельно любому разложению (2) его характеристического многочлена, то он также разложим на унитальные множители параллельно любому разложению характеристического многочлена вида

$$\Delta(x) = \Delta_{k_1}(x)\,\Delta_{k_2}(x)\,\ldots\,\Delta_{k_l}(x),$$

$$\deg \Delta_{k_i} = k_i n,\ 1 \leqslant k_i \leqslant m-1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Установим необходимые и достаточные условия того, чтобы унитальный матричный многочлен, характеристические числа которого попарно различны, был абсолютно разложимым, и докажем существование унитальных матричных многочленов с попарно различными характеристическими числами, обладающих свойством абсолютной разложимости.

Естественно, что задача об абсолютной разложимости матричного многочлена представляет особый интерес в случае, когда его характеристические числа попарно различны, ибо, если $\det A(x) = (x-\alpha)^{mn}$, то из разложимости матричного многочлена $A(x)$ на линейные унитальные множители следует его абсолютная разложимость. Частные случаи этой задачи рассмотрены в работах [2, 8].

Пусть характеристические числа унитального матричного многочлена (1) попарно различны, т. е.

$$\Delta(x) = \prod_{j=1}^{mn} (x - \alpha_j),$$

* Здесь и в дальнейшем рассматриваем разложения характеристического многочлена $\Delta(x)$ только на унитальные множители.

$\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Тогда на основании данных работы [7] матричный многочлен $A(x)$ приводится к виду

$$F(x) = QA(x)R(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix}, \qquad (3)$$

где Q — неособенная, а $R(x)$ — обратимая матрицы и $\deg \varphi_i < \deg \Delta = mn$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Запишем взаимную матрицу матрицы $F(x)$:

$$F_*(x) = \begin{Vmatrix} \Delta(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta(x) & 0 \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \dots & \psi_{n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (4)$$

где

$$\psi_i(x) = (-1)^{n+i}\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1). \qquad (5)$$

Последнюю строку матрицы $F_*(x)$ обозначим через $g(x)$, т. е.

$$g(x) = \| \psi_1(x) \quad \psi_2(x) \dots \psi_{n-1}(x) \quad 1 \|.$$

Через G_r в дальнейшем будем обозначать матрицу вида

$$G_r = \begin{Vmatrix} \alpha_1^r\psi_1(\alpha_1) & \dots & \alpha_1^r\psi_{n-1}(\alpha_1) & \alpha_1^r \\ \alpha_2^r\psi_1(\alpha_2) & \dots & \alpha_2^r\psi_{n-1}(\alpha_2) & \alpha_2^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{mn}^r\psi_1(\alpha_{mn}) & \dots & \alpha_{mn}^r\psi_{n-1}(\alpha_{mn}) & \alpha_{mn}^r \end{Vmatrix}. \qquad (6)$$

Теорема 1. Унитальный матричный многочлен (1), характеристические числа которого попарно различны, является абсолютно разложимым тогда и только тогда, когда в каждой матрице

$$H_k = \| G_0 \quad G_1 \dots G_k \| \qquad (k = 0, 1, \dots, m-2)$$

любые $(k+1)n$ строки линейно независимы.

Доказательство. На основании [3] унитальный матричный многочлен (1) с попарно различными характеристическими числами разложим в произведение линейных унитальных множителей параллельно разложению (2) его характеристического многочлена тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} M_{A_k(x)}(\Delta_1\Delta_2 \dots \Delta_{k+1}) = (k+1)n \qquad (7)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, m-2$, где

$$A_k(x) = A_*(x) \| E \quad Ex \dots Ex^k \|;$$

$A_*(x)$ — взаимная матрица матрицы $A(x)$; $M_{A_k(x)}(\Delta_1\Delta_2 \dots \Delta_k)$ — значение матрицы $A_k(x)$ на системе корней многочлена $\Delta_1(x)\Delta_2(x) \dots \Delta_k(x)$ [4].

Пусть $\Delta_i(x)$ — произвольный делитель характеристического многочлена $\Delta(x)$. Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{rang} M_{A_k(x)}(\Delta_i) = \operatorname{rang} M_{F_k(x)}(\Delta_i) = \operatorname{rang} M_{g_k(x)}(\Delta_i), \qquad (8)$$

где

$$F_k(x) = F_*(x) \| E \quad Ex \dots Ex^k \|;$$

$$g_k(x) = g(x) \| E \quad Ex \dots Ex^k \| = \| g(x) \quad xg(x) \dots x^k g(x) \|.$$

Матрица $M_{g_k(x)}(\Delta_1\Delta_2 \dots \Delta_{k+1})$ составлена из некоторых $(k+1)n$ строк матрицы H_k. Поэтому, учитывая соотношения (7), (8), заключаем, что матричный многочлен (1) с попарно различными характеристическими числами разложим в произведение линейных унитальных множителей, параллельно разложению (2) его характеристического многочлена тогда и только тогда, когда в каждой матрице H_k ($k = 0, 1, \ldots, m-2$) соответствующие $(k+1)n$ строки линейно независимы. Отсюда и следует доказательство теоремы.

Покажем, что существуют унитальные матричные многочлены с попарно различными характеристическими числами, обладающие свойством абсолютной разложимости. Для этого будем считать многочлены $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) в матрице (3), а значит, и многочлены $\psi_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) в матрице (4) неизвестными. Обозначим $\psi_i(\alpha_j)$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$; $j = 1, 2, \ldots, mn$) через t_{ij}, а матрицу, полученную из матрицы (6) заменой $\psi_i(\alpha_j)$ на t_{ij}, через $G_r(t_{ij})$.

Лемма. Минор порядка $(k+1)n$, составленный из произвольных $(k+1)n$ строк матрицы

$$H_k(t_{ij}) = \| G_0(t_{ij}) \quad G_1(t_{ij}) \ \ldots \ G_k(t_{ij}) \|, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{9}$$

тождественно не равен нулю.

Доказательство. Без ограничения общности можно рассмотреть минор, составленный из первых $(k+1)n$ строк матрицы (9). Переставляя его столбцы, получаем следующий минор:

$$M = | N_0 \quad N_1 \ \ldots \ N_{n-2} \quad N_{n-1} |, \tag{10}$$

где

$$N_0 = \left\| \begin{matrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^k \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{(k+1)n} & \ldots & \alpha_{(k+1)n}^k \end{matrix} \right\|;$$

$$N_j = \operatorname{diag}(t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j,(k+1)n}) N_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Дальнейшее доказательство проводим индукцией по n. Минор порядка $k + 1$

$$V(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{k+1}}) = \left| \begin{matrix} 1 & \alpha_{i_1} & \ldots & \alpha_{i_1}^k \\ 1 & \alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_2}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{i_{k+1}} & \ldots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{matrix} \right|,$$

составленный из произвольных $k+1$ строк матрицы N_0, являясь определителем Вандермонда, отличный от нуля, т. е. $V(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{k+1}}) \neq 0$.

Разлагая минор (10) по последним $k+1$ столбцам (столбцам матрицы N_{n-1}), получаем

$$M = \Sigma t_{n-1,i_1} t_{n-1,i_2} \ldots t_{n-1,i_{k+1}} V(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{k+1}}) M_i, \tag{11}$$

где M_i — минор порядка $(k+1)(n-1)$ вида (10). По предположению индукции $M_i \not\equiv 0$. Тогда из (11) следует, что $M \not\equiv 0$. Лемма доказана.

В каждой матрице

$$H_k(t_{ij}) = \| G_0(t_{ij}) \quad G_1(t_{ij}) \ \ldots \ G_k(t_{ij}) \|$$

($k = 0, 1, \ldots, m-1$) составим всевозможные миноры порядка $(k+1)n$. Учитывая предыдущую лемму, получаем систему ненулевых многочленов относительно переменных t_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n-1$; $j = 1, 2, \ldots, mn$). В бесконечном поле найдется набор значений λ_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n-1$; $j = 1, 2, \ldots, mn$), при которых каждый из упомянутых многочленов отличный от нуля. Далее, существует один и только один многочлен $\psi_i(x)$ степени, меньшей mn, который при заданных mn различных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn}$

переменной принимает заданные значения $\psi_i(\alpha_j) = \lambda_{ij}$. Этот многочлен задается интерполяционной формулой Лагранжа [1].

Запишем матрицу $F(x)$ вида (3), в которой $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ найдены из соотношений (5), а $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Тогда ранг матрицы

$$H_{m-1} = \| G_0 \quad G_1 \ \ldots \ G_{m-1} \|$$

равен mn и матрица $F(x)$ регуляризуется справа [5], т. е. существует обратимая матрица $R(x)$ такая, что $F(x) R(x) = B(x)$ — унитальная матрица. На основании теоремы 1 так построенный матричный многочлен $B(x)$ является абсолютно разложимым.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Существуют унитальные матричные многочлены с наперед заданными попарно различными характеристическими числами, обладающие свойством абсолютной разложимости.

Из теоремы 1 вытекают такие следствия.

Следствие 1. Унитальный матричный многочлен (1) с попарно различными характеристическими числами обладает свойством абсолютной выделяемости левых линейных унитальных множителей [2] тогда и только тогда, когда в матрице

$$H_0 = \left\| \begin{matrix} \psi_1(\alpha_1) & \ldots & \psi_{n-1}(\alpha_1) & 1 \\ \psi_1(\alpha_2) & \ldots & \psi_{n-1}(\alpha_2) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_1(\alpha_{mn}) & \ldots & \psi_{n-1}(\alpha_{mn}) & 1 \end{matrix} \right\|$$

каждые n строк линейно независимы.

Следствие 2. Если унитальный матричный многочлен

$$A(x) = Ex^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m$$

с попарно различными характеристическими числами обладает свойством абсолютной выделяемости левых линейных унитальных множителей (в этом случае матричный многочлен $A(x)$ удовлетворяет условию Хаара [9]), то соответствующее матричное уравнение

$$X^m + X^{m-1} A_1 + \cdots + A_m = 0$$

имеет максимальное число $\binom{mn}{n}$ различных решений.

Отметим одно свойство абсолютно разложимых матричных многочленов.

Теорема 3. Абсолютно разложимый унитальный матричный многочлен $A(x)$ с попарно различными характеристическими числами преобразованием подобия не приводится к клеточно-треугольному виду.

Доказательство. Положим противное, т. е.

$$TA(x)T^{-1} = \left\| \begin{matrix} A_1(x) & * \\ 0 & A_2(x) \end{matrix} \right\|, \tag{12}$$

где $A_1(x)$ и $A_2(x)$ — матрицы порядков n_1 и n_2 и

$$\det A_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ \ldots \ (x - \alpha_{mn_1}),$$
$$\det A_2(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ \ldots \ (x - \beta_{mn_2}).$$

Тогда взаимная матрица матрицы (12) имеет вид

$$(TA(x)T^{-1})_* = \left\| \begin{matrix} \det A_2(x) A_{1*}(x) & * \\ 0 & \det A_1(x) A_{2*}(x) \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Рассмотрим следующее разложение характеристического многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$:

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) \Delta_2(x),$$
$$\Delta_1(x) = (x - \alpha_1) \ \ldots \ (x - \alpha_r)(x - \beta_1) \ \ldots \ (x - \beta_s), \qquad r + s = n, \quad r < n_1.$$

Для этого разложения характеристического многочлена не существует параллельного разложения матричного многочлена $A(x)$.

Действительно, поскольку для каждого корня α_i многочлена $\det A_1(x)$ $\operatorname{rang} A_{1*}(\alpha_i) = 1$, то

$$\operatorname{rang} M_{A_{1*}(x)}(\varphi) \leqslant r < n_1,$$

где $\varphi(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_r)$. Учитывая вид матрицы (13), получаем, что первые n_1 столбцов матрицы $M_{(TA(x)T^{-1})_*}(\Delta_1)$ линейно зависимы. Отсюда следует, что

$$\operatorname{rang} M_{(TA(x)T^{-1})_*}(\Delta_1) = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta_1) < n,$$

т. е. матричный многочлен $A(x)$ не является абсолютно разложимым. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Утверждение, обратное к теореме 3, неверно. Действительно, матричный трехчлен

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} x^2 + \frac{1}{7}\begin{Vmatrix} -15 & 3 & -3 \\ 8 & -3 & 3 \\ -8 & -4 & -3 \end{Vmatrix} x + \frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 6 \\ 0 & -4 & -34 \end{Vmatrix}$$

преобразованием подобия не приводится к клеточно-треугольному виду. Это нетрудно проверить, используя критерий приводимости из работы [6]. В то же время для разложения характеристического многочлена

$$\Delta(x) = \Delta_1(x)\,\Delta_2(x), \quad \Delta_1(x) = x(x+1)(x-3)$$

не существует параллельного разложения трехчлена $A(x)$ на линейные унитальные множители, т. е. трехчлен $A(x)$ не является абсолютно разложимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варден Б. Л. ван дер.* Алгебра. М., Наука, 1976. 648 с.
2. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев, 1976, с. 29—40.
3. *Казімірський П. С.* Про розклад поліноміальної матриці на лінійні множники.— Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1965, вип. 8, с. 53—60.
4. *Казимирский П. С.* Разложение регулярного матричного многочлена на множители.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 6, с. 488—491.
5. *Казимирский П. С.* О разложении матричного многочлена на множители.— Укр. мат. журн., 1972, 24, № 3, с. 316—327.
6. *Казимирский П. С., Грыние Л. М.* Приведение регулярного матричного многочлена к квазидиагональному виду.— Укр. мат. журн., 1974, 26, № 3, с. 318—327.
7. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні й прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. Київ, 1977, с. 61—66.
8. *Петричкович В. М., Шуляр М. А.* Об абсолютной разложимости матричного квадратного трехчлена.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 188—190.
9. *Dennis J. E., Traub J. F., Weber R. P.* The algebraic theory of matrix polynomials.— SIAM J. Numer. Anal., 1976, 13, N 6, p. 831—845.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.12.77

УДК 512.8

Б. З. Шаваровский

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ И ПОДОБИЕ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим регулярный матричный пучок первой степени $A_0\lambda + A_1$, где A_0, A_1 — квадратные $n \times n$-матрицы над C (C — поле комплексных чисел); $\lambda \in C$ и $|A_0| \neq 0$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа этого