УДК 517.948.513.88

И. М. Ковальчик

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В работе [1] определен детерминант Вронского, связанный с одним частным видом уравнений с функциональными производными. В настоящей работе введен определитель Вронского, который связан с более широким классом линейных однородных уравнений в функциональных производных, и исследованы его свойства.

Пусть X — линейное нормированное пространство функций одной вещественной переменной; R — числовая ось; $J(x)$: $X \to R$; $[a, b] \subset R$ и $G_k = \underbrace{[a, b] \times \ldots \times [a, b]}_{k}$. Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка ($n \geqslant 2$) в функциональных производных

$$\frac{\delta^n J(x)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_n)} + p_1(x, t_n) \frac{\delta^{n-1} J(x)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{n-1})} + \cdots$$

$$\cdots + p_{n-1}(x, t_2, \ldots, t_n) \frac{\delta J(x)}{\delta x(t_1)} + p_n(x, t_1, \ldots, t_n) J(x) = 0. \qquad (1)$$

Для определенности будем считать, что $\dfrac{\delta^k J(x)}{\delta x(\cdot) \ldots \delta x(\cdot)} \in L_2(G_k)$ $(k = \overline{1, n})$ Предполагаем, что уравнение (1) вполне разрешимо в области $D \subset X$ [2].

Пусть

$$\frac{\delta p(x, t_1)}{\delta x(t_2)} = \frac{\delta p(x, t_2)}{\delta x(t_1)} \qquad (\forall\, t_1, t_2 \in [a, b]). \qquad (2)$$

Если коэффициенты уравнения (1) отличны от нуля, то равенство (2) вытекает из полной разрешимости данного уравнения [3]. Однако для наших целей достаточно просто предполагать справедливость этого условия. Условие (2) используется только при доказательстве теоремы 3.

Пусть функционалы $J(x)$ $(k = \overline{1, n})$ обладают функциональными производными до $(n-1)$-го порядка включительно. Детерминант Вронского для функционалов $J_1(x), \ldots, J_n(x)$ определяется равенством

$$W(x, t_1, \ldots, t_{n-1}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{vmatrix} J_1(x) & \ldots & J_n(x) \\ \dfrac{\delta J_1(x)}{\delta x(t_1)} & \ldots & \dfrac{\delta J_n(x)}{\delta x(t_1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\delta^{n-1} J_1(x)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{n-1})} & \ldots & \dfrac{\delta^{n-1} J_n(x)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{n-1})} \end{vmatrix}.$$

Если функциональные производные от функционалов $J_1(x), \ldots, J_n(x)$ не зависят от точек, в которых они вычисляются, то приходим к определению детерминанта Вронского, принятого в статье [1].

Теорема 1. Если функционалы $J_1(x), \ldots, J_n(x)$, заданные на множестве $A \subset X$, линейно зависимы на A, то определитель Вронского для них равен нулю $\forall\, x \in A$.

Доказательство. Из линейной зависимости функционалов следует, что

$$J_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j J_j(x) \qquad (\gamma_j = \mathrm{const},\ j = \overline{1, n-1}).$$

Данное тождество дифференцируем $n-1$ раз. Затем подставляем вместо $J_n(x)$, $\frac{\delta J_n(x)}{\delta x(t_1)}$, ..., $\frac{\delta^{n-1} J_n(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n-1})}$ их значения в последний столбец определителя Вронского. Полученный определитель разлагается на сумму определителей, каждый из которых содержит два пропорциональных столбца.

Теорема 2. Если решения $J_1(x), \ldots, J_n(x)$ уравнения (1) линейно независимы в области D полной разрешимости уравнения (1), то $W(x, t_1, \ldots, t_{n-1})$ не обращается в нуль ни в одной точке $(x, t_1, \ldots, t_{n-1}) \in D \times G_{n-1}$.

Доказательство. Предположим, что наоборот $W(x_0, t_1^0, \ldots, t_{n-1}^0) = 0$, где $x_0 \in D$ и $(t_1^0, \ldots, t_{n-1}^0) \in G_{n-1}$ фиксированы. Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — некоторые постоянные. Составим алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_n$:

$$\begin{gathered}
C_1 J_1(x_0) + \cdots + C_n J_n(x_0) = 0, \\
C_1 \frac{\delta J_1(x_0)}{\delta x(t_1^0)} + \cdots + C_n \frac{\delta J_n(x_0)}{\delta x(t_1^0)} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_1 \frac{\delta^{n-1} J_1(x_0)}{\delta x(t_1^0)\ldots\delta x(t_{n-1}^0)} + \cdots + C_n \frac{\delta^{n-1} J_n(x_0)}{\delta x(t_1^0)\ldots\delta x(t_{n-1}^0)} = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Определителем этой системы служит $W(x_0, t_1^0, \ldots, t_{n-1}^0)$. Однако он равен нулю, следовательно, не все решения C_j $(j = \overline{1, n})$ системы (3) нулевые.

Составим функционал $J^*(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j J_j(x)$. Очевидно, что функционал $J^*(x)$ удовлетворяет уравнению (1), а в силу уравнений (3) — условиям

$$J^*(x_0) = 0; \quad \frac{\delta^k J^*(x_0)}{\delta x(t_1^0)\ldots\delta x(t_k^0)} = 0 \qquad (k = \overline{1, n-1}). \tag{4}$$

По предположению уравнение (1) вполне разрешимо в области D, содержащей точку x_0. Таким образом, существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4), а именно $J^*(x) \equiv 0$. Следовательно, $\sum_{j=1}^{n} C_j J_j(x) = 0$ для $\forall x \in D$, где не все C_j равны нулю. Последнее противоречит условию линейной независимости функционалов $J_1(x), \ldots, J_n(x)$.

Теорема 3. Пусть коэффициенты вполне разрешимого в области D уравнения (1) отличны от нуля, коэффициент $p_1(x, t)$ дифференцируем по x в слабом смысле, справедливо равенство (2) и $p_1(x, \cdot) \in L_2[a, b]$. Тогда имеет место следующий аналог формулы Остроградского — Лиувилля:

$$W(x, t_1, \ldots, t_{n-1}) = W(x_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) \exp\left\{-\int_0^1 ds \int_a^b p_1[s(x-x_0) + \right.$$
$$\left. + x_0, t][x(t) - x_0(t)]\, dt\right\}. \tag{5}$$

Доказательство. Из дифференцируемости $p_1(x, t)$ по x вытекает, что $p_1[s(x-x_0) + x_0, t]$ — непрерывная функция переменной $s \in [0, 1]$. Если $J_m(x)$ $(m = \overline{1, n})$ — решения уравнения (1), то

$$\frac{\delta^n J_m(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_n)} \equiv -p_1(x, t_n) \frac{\delta^{n-1} J_m(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n-1})} - \cdots$$
$$\cdots - p_{n-1}(x, t_2, \ldots, t_n) \frac{\delta J_m(x)}{\delta x(t_1)} - p_n(x, t_1, \ldots, t_n) J_m(x).$$

Так как производная в левой части этого тождества симметричная функция параметров $t_1, \ldots, t_n$, то выражения

$$\frac{\delta^k J_m(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_k)} p_{n-k}(x, t_{k+1}, \ldots, t_n) \qquad (k = \overline{1, n-1})$$

также будут симметричными функциями переменных $t_1, \ldots, t_n$. В частности,

$$\frac{\delta^k J_m(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{k-1})\,\delta x(t_k)} p_{n-k}(x, t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, t_n) =$$

$$= \frac{\delta^k J_m(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{k-1})\,\delta x(t_n)} p_{n-k}(x, t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, t_k) \tag{6}$$

для $k = \overline{1, n-1}$, $m = \overline{1, n}$ и $\forall t_1, \ldots, t_n \in [a, b]$.

Продифференцируем определитель

$$W(x, t_1, \ldots, t_{n-1}) = \begin{vmatrix} J_1(x) & \ldots & J_n(x) \\ \dfrac{\delta J_1(x)}{\delta x(t_1)} & \ldots & \dfrac{\delta J_n(x)}{\delta x(t_1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\delta^{n-1} J_1(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n-1})} & \ldots & \dfrac{\delta^{n-1} J_n(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n-1})} \end{vmatrix}$$

по x в точке t_n. Легко проверить (например, методом математической индукции), что обычное правило дифференцирования определителя сохраняет свою силу и при функциональном дифференцировании, а именно: сначала вычисляются функциональные производные от первой строки, остальные строки переписываются без изменений, затем дифференцируется вторая строка, остальные переписываются и т. д.— до последней строки; продифференцированные определители складываются. Все полученные в результате дифференцирования определители, кроме последнего, равны нулю. Это следует из пропорциональности соответствующих строк определителей. Последнее вытекает из условий (6) (все выкладки опускаем). Таким образом,

$$\frac{\delta W(x, t_1, \ldots, t_{n-1})}{\delta x(t_n)} = \begin{vmatrix} J_1(x) & \ldots & J_n(x) \\ \dfrac{\delta J_1(x)}{\delta x(t_1)} & \ldots & \dfrac{\delta J_n(x)}{\delta x(t_1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\delta^{n-2} J_1(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n-2})} & \ldots & \dfrac{\delta^{n-2} J_n(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n-2})} \\ \dfrac{\delta^{n} J_1(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n})} & \ldots & \dfrac{\delta^{n} J_n(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n})} \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы первой строки этого определителя на $p_n(x, t_1, \ldots, t_n)$, второй строки — на $p_{n-1}(x, t_2, \ldots, t_n)$ и т. д., $(n-1)$-й строки — на $p_2(x, t_{n-1}, t_n)$ и прибавляя к элементам последней строки, после преобразований получаем

$$\frac{\delta W(x, t_1, \ldots t_{n-1})}{\delta x(t_n)} = -p_1(x, t_n)\, W(x, t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

При фиксированных $t_1, \ldots, t_{n-1}$ данное уравнение является простейшим уравнением в функциональных производных. Необходимое и достаточное условие его полной разрешимости задается равенством (2). Применение операции первообразного функционала приводит к формуле (5).

Теорема 4. Пусть коэффициенты вполне разрешимого в области D уравнения (1) отличны от нуля. Тогда

$$\frac{\delta W(x, t_1, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1})}{\delta x(t_n)} = \frac{\delta W(x, t_1, \ldots, t_{n-2}, t_n)}{\delta x(t_{n-1})}, \tag{7}$$

где определитель Вронского составлен из функционалов $J_1(x), \ldots, J_n(x)$, являющихся решениями уравнения (1); значения $t_1, \ldots, t_{n-2} \in [a, b]$ фиксированы, а $t_{n-1}, t_n \in [a, b]$ произвольны и отличны от $t_1, \ldots, t_{n-2}$.

Доказательство. Если уравнение (1) вполне разрешимо и функционалы $J_m(x)$ $(m = \overline{1, n})$ удовлетворяют уравнению (1), то, как показано при доказательстве предыдущей теоремы, справедливо равенство (6). Вычисляя производные от определителей в обеих частях равенства (7) и учитывая условие (6), получаем искомую формулу.

Отметим, что приведенные здесь результаты допускают простое обобщение на случай функций многих вещественных переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковальчик И. М.* О линейных уравнениях с функциональными производными.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 1, с. 99—105.
2. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М., Мир, 1964. 430 с.
3. *Ковальчик И. М.* Условия разрешимости линейных уравнений в функциональном пространстве.— Докл. АН СССР, 1973, **213**, № 5, с. 1051—1054.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 19.05.77

УДК 512.83

А. И. Балинский, Ли-Гюн-Ы

ОБ ОБРАЩЕНИИ ГАНКЕЛЕВЫХ И ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

В последнее время развит ряд способов обращения ганкелевых и теплицевых матриц (см. например, [1]), один из которых состоит в восстановлении обратной матрицы по некоторым наперед определенным двум ее столбцам. Однако при этом возникают случаи, когда обратная матрица однозначно не определяется никакой парой своих столбцов. В настоящей работе показано, что матрица, обратная к ганкелевой (и, как следствие, к теплицевой), однозначно определяется своим последним столбцом и некоторыми частями двух определенных соседних ее столбцов, а также предложен способ восстановления ее по этим данным, основанный на использовании понятия безутиантной матрицы и ее представления, установленного в работе [2].

Пусть имеется пара многочленов вида

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \\ h(\lambda) &= b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n \end{aligned} \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами, причем $h(\lambda)$ не обязательно точно степени $n-1$. Запишем формальное разложение

$$\frac{h(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{s_0}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \frac{s_2}{\lambda^3} + \cdots.$$

Очевидно, коэффициенты s_q $(q = 0, 1, \ldots)$ этого разложения определяются последовательно рекуррентным соотношением

$$s_q + a_1 s_{q-1} + \cdots + a_n s_{q-n} = \begin{cases} b_{q+1} & \text{при } 0 \leqslant q \leqslant n-1, \\ 0 & \text{при } q > n-1, \end{cases} \tag{2}$$

причем $s_q = 0$ при $q < 0$.

Из чисел s_q $(q = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ составим ганкелеву $(n \times n)$-матрицу

$$H_n = \| s_{i+j} \|_{i,j=0}^{n-1}. \tag{3}$$

Пару многочленов (1) будем называть порождающей ганкелеву матрицу