УДК 517.944.947

В. И. Жук, Б. И. Пташник

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей работе, являющейся развитием работы [5], изучена задача типа задачи Дирихле для нестрого гиперболической системы уравнений $2n$-го порядка с постоянными действительными коэффициентами, однородных по порядку дифференцирования, в области $D_m = [0, T] \times \Omega_m$, где Ω_m — m-мерный тор, полученный отождествлением противоположных граней параллелепипеда $\{x : 0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi,\ j = 1, \ldots, m\}$, и установлены условия существования, единственности и корректности решения почти всюду и классического решения задачи.

Рассмотрим в области D_m задачу

$$A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \equiv \sum_{|p|=2n} A_p \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial t^{2p_0} \partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_m^{p_m}} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2j} u(x, t)}{\partial t^{2j}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad \left.\frac{\partial^{2j} u(x, t)}{\partial t^{2j}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \ j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_s)$; $\varphi_j = (\varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{js})$; A_p — $s \times s$-матрицы с постоянными действительными элементами; $p = (p_0, p_1, \ldots, p_m)$, $|p| = 2p_0 + p_1 + \ldots + p_m$; $A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \left(\left[A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\right]_1, \ldots, \left[A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\right]_s\right)$.
Вид области D_m налагает условия 2π-периодичности по x на вектор-функции u и φ.

Предположим, что система (1) нестрого гиперболическая, т. е. для произвольного действительного вектора $\eta \neq 0$ уравнение

$$\det\left[\sum_{|p|=2n} A_p \mu^{2p_0} \eta_1^{p_1} \ldots \eta_m^{p_m}\right] = 0 \tag{3}$$

имеет кратные действительные корни $\mu(\eta)$. Для простоты изложения будем считать, что кратность корней не зависит от η. Пусть для каждого вектора $\eta \neq 0$ уравнение (3) имеет $2q$ различных действительных корней $\pm\mu_1(\eta), \ldots, \pm\mu_q(\eta)$ кратностей соответственно $l_1, \ldots, l_q$ $(l_1 + \ldots + l_q = ns)$.

В дальнейшем используем такие обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_m)$; $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$; $k = (k_1, \ldots, k_m)$; $(k, x) = k_1x_1 + \cdots + k_mx_m$; $|k| = |k_1| + \ldots + |k_m|$; H_q $(q = 0, 1, \ldots)$ — гильбертово пространствс 2π-периодических по всем переменным скалярных функций

$$f(x) = \sum_k f_k \exp\{i(k, x)\} \quad (f_{-k} = \bar{f}_k)$$

со скалярным произведением, индуцирующим норму

$$\|f\|_{H_q}^2 = (f, f)_{H_q} = \sum_{|k| \geqslant 0} [1 + (k, k)]^q |f_k|^2.$$

Заметим, что $H_q\ (q \geqslant 0)$ — пространство периодических функций, имеющих обобщенные производные до порядка q, суммируемые с квадратом (см [1]), $\overline{H}_q\ (q = 0,\ 1,\ \ldots)$ — гильбертово пространство вектор-функций $v(x) = (v_1(x),\ \ldots,\ v_s(x))$, $v_m(x) \in H_q\ (m = 1,\ \ldots,\ s)$ со скалярным произведением, индуцирующим норму $\|v\|^2_{\overline{H}_q} = (v, v)_{\overline{H}_q} = \sum\limits_{m=1}^{s} \|v_m\|^2_{H_q}$, $H_{t,r}\ (r \geqslant 2n)$ — гильбертово пространство вектор-функций $u(x,\ t)$, таких, что $\frac{\partial^l u(x,\ t)}{\partial t^l}$ $(l = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n)$ для каждого $t \in [0,\ T]$ принадлежит пространству $\overline{H}_{r-l}$ и является непрерывной по t в норме пространства $\overline{H}_{r-l}$. Норма в пространстве $H_{t,r}$ задается формулой

$$\|u(x,\ t)\|^2_{H_{t,r}} = \int\limits_0^T \sum_{l=0}^{2n} \left\| \frac{\partial^l u(x,\ t)}{\partial t^l} \right\|^2_{\overline{H}_{r-l}} dt.$$

Будем рассматривать решения задачи (1), (2) из пространства $H_{t,r}$. Тогда если $r = 2n$, то получаем решение почти всюду, а если $r \geqslant 2n + \left[\frac{m}{2}\right] + 1$, то согласно теореме С. Л. Соболева о вложении пространств получаем классическое решение. Решение почти всюду задачи (1), (2) — это вектор-функция $u(x,\ t)$, которая удовлетворяет системе уравнений (4) для всех $t \in [0,\ T]$ и условиям (5):

$$\int\limits_{\Omega_m} \left[A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2},\ \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ t) \right]_l^2 d\Omega_m = 0,\quad l = 1,\ \ldots,\ s, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega_m} \left(\left.\frac{\partial^{2j} u_l(x,\ t)}{\partial t^{2j}}\right|_{t=0} - \varphi_j(x) \right)^2 d\Omega_m = 0 \\ &\int\limits_{\Omega_m} \left(\left.\frac{\partial^{2j} u_l(x,\ t)}{\partial t^{2j}}\right|_{t=T} - \varphi_{n+j}(x) \right)^2 d\Omega_m = 0 \end{aligned}\right\},\quad \begin{aligned} &j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1; \\ &l = 1,\ \ldots,\ s. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение задачи (1), (2) ищем в виде ряда

$$u(x,\ t) = \sum_{|k| \geqslant 0} u_k(t)\, e^{i(k,x)}. \tag{6}$$

Подставляя в (1), (2) ряд (6) и ряды Фурье для вектор-функций $\varphi_j(x)$ $(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1)$, для определения каждой вектор-функции $u_k(t)$ получаем задачу

$$\sum_{|p|=2n} A_p \frac{d^{2p_0} u_k(t)}{dt^{2p_0}} (ik_1)^{p_1} \ldots (ik_m)^{p_m} = 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{d^{2j} u_k(t)}{dt^{2j}}\right|_{t=0} = \varphi_{jk},\quad \left.\frac{d^{2j} u_k(t)}{dt^{2j}}\right|_{t=T} = \varphi_{(n+j)k},\quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{8}$$

где $\varphi_{jk} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int\limits_{\Omega_m} \varphi_j(x) \exp\{-i(k,\ x)\}\, d\Omega_m;\quad \varphi_{jk} = (\varphi_{j1k},\ \ldots,\ \varphi_{jsk})$.

Замечание 1. Для вектора $k = 0$ всегда существует единственное решение $u_0(t)$ задачи (7), (8). В этом случае система (7) распадается на s независимых уравнений.

Найдем фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений (7) при $k \neq 0$. Корни $\lambda(k)$ характеристического уравнения, которое соответствует системе (7), имеют вид $\pm \lambda_j(k) = \pm i\mu_j(k)\sqrt{(k,\ k)}$ $(j = 1,\ \ldots,\ q)$, где $\mu_j(k)$ — положительные корни уравнения (3) при $\eta_r = k_r(k,\ k)^{-\frac{1}{2}}$ $(r = 1,\ \ldots,\ m)$. В дальнейшем под λ и μ будем понимать $\lambda(k)$ и $\mu(k)$. Согласно теореме об элементарных делителях (см. [4]) сущестзуют такие полиномиальные $s \times s$-матрицы $P(\lambda^2)$ и $Q(\lambda^2)$, что $\det P(\lambda^2) = \mathrm{const} \neq 0$, $\det Q(\lambda^2) = \mathrm{const} \neq 0$ и

$$P(\lambda^2)\, A(\lambda^2, ik)\, Q(\lambda^2) = \begin{pmatrix} m_1(\lambda^2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_s(\lambda^2) \end{pmatrix} = M(\lambda^2),$$

где $m_r(\lambda^2)$ $(r = 1, \ldots, s)$ — инвариантные многочлены и $m_r(\lambda^2)$ делит $m_{r-1}(\lambda^2)$; $\det M(\lambda^2) = m_1(\lambda^2) \ldots m_s(\lambda^2)$; $\deg m_1 + \cdots + \deg m_s = ns$; $\deg m_1 \leqslant \deg m_2 \leqslant \cdots \leqslant \deg m_s$. Поэтому система (7) сводится к такой:

$$\begin{aligned} &m_1\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) v_{k1}(t) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &m_s\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) v_{ks}(t) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $v_k(t) = Q^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) u_k(t)$. Чтобы построить фундаментальную систему решений системы уравнений (9), последовательно найдем все линейно независимые решения, которые соответствуют корням $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_q$. Пусть $m_p(\lambda^2) = (\lambda^2 - \lambda_1^2)^{\varkappa_p^1} \ldots (\lambda^2 - \lambda_q^2)^{\varkappa_p^q}$ $(p = 1, \ldots, s)$, $\varkappa_1^j + \cdots + \varkappa_s^j = l_j$. Рассмотрим, например, корень λ_j, имеющий кратность l_j. Пусть для некоторого r $(1 \leqslant r \leqslant s)$ $\varkappa_p^j = 0$ при $p < r$ и $\varkappa_p^j > 0$ при $p \geqslant r$. Тогда скалярное уравнение $m_p\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) v_{kp}(t) = 0$ имеет линейно независимые решения $e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{\varkappa_p^j - 1} e^{\lambda_j t}$, а линейно независимые решения системы (9), которые соответствуют корню λ_j, имеют вид $v_k^{p1} = \varepsilon_p e^{\lambda_j t}, \ldots, v_k^{p\varkappa_p^j} = \varepsilon_p t^{\varkappa_p^j - 1} e^{\lambda_j t}$ $(p = r, \ldots, s)$, где $\varepsilon_p = (\delta_{1p}, \ldots, \delta_{sp})'$; δ_{ip} — символ Кронекера. Заметим, что $v_k^{pi} = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\right)^{i-1} \varepsilon_p e^{\lambda_j t}$ $(p = r, \ldots, s;\ i = 1, \ldots, \varkappa_p^j)$. Тогда соответствующие линейно независимые решения системы (7) записываются в виде

$$u_k^{pi} = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\right)^{i-1} [e^{\lambda_j t} Q(\lambda_j^2)\, \varepsilon_p] = e^{\lambda_j t}(i-1)! \sum_{r=0}^{i-1} \frac{t^r}{r!} R_{i-r-1}^p, \tag{10}$$

$$p = r, \ldots, s;\ i = 1, \ldots, \varkappa_p^j; \quad R_l^p = \frac{1}{l!}\left(\frac{d}{d\lambda_j}\right)^l Q(\lambda_j^2)\, \varepsilon_p.$$

Вектор-функции u_k^{pi} $(i = 1, \ldots, \varkappa_p^j)$ — это линейно независимые решения системы (7), которые соответствуют элементарному делителю $(\lambda - \lambda_j)^{\varkappa_p^j}$ матрицы $A(\lambda^2, ik)$, а совокупность функций (10) — объединение множеств этих решений по всем элементарным делителям, соответствующим корню λ_j. Следовательно, каждому элементарному делителю матрицы $A(\lambda^2, ik)$ вида $(\lambda - \alpha)^\mu$ (α — один из нулей полинома $\det A(\lambda^2, ik)$ кратности l) соответствует μ независимых решений системы (7):

$$u_k^i(t) = e^{\alpha t} \sum_{r=0}^{i-1} \frac{t^r}{r!} R_{i-r-1},$$

где векторы R_{i-r-1} определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} &A(\alpha^2, ik)\, R_0 = 0, \\ &A^1(\alpha^2, ik)\, R_0 + A(\alpha^2, ik)\, R_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A^{\mu-1}(\alpha^2, ik)\, R_0 + A^{\mu-2}(\alpha^2, ik)\, R_1 + \cdots + A(\alpha^2, ik)\, R_{\mu-1} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

в которой $A^r(\alpha^2, ik) = \left[\frac{1}{r!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^r A(\lambda^2, ik)\right]_{\lambda=\alpha}$.

Пусть корню λ_j $(j = 1, \ldots, q)$ соответствует s_j элементарных делителей $(\lambda - \lambda_j)^{\varkappa_\sigma^j}$ $(\sigma = 1, \ldots, s_j)$. Найдем все линейно независимые решения системы (7), соответствующие корням $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_q$. Совокупность этих решений образует фундаментальную систему решений системы (7), с помощью которой общее решение системы (7) представляется в виде

$$u_k(t) = \sum_{\rho=1}^{q} \sum_{\sigma=1}^{s_\rho} \sum_{i=1}^{\varkappa_\sigma^\rho} \left[C_{\sigma i}^\rho \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{t^j}{j!} R_{\sigma(i-j-1)}^\rho \right) e^{\lambda_\rho t} + \right.$$
$$\left. + D_{\sigma i}^\rho \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{t^j}{j!} R_{\sigma(i-j-1)}^\rho \right) e^{-\lambda_\rho t} \right], \tag{12}$$

где $C_{\sigma i}^\rho$, $D_{\sigma i}^\rho$ — произвольные константы; векторы $R_{\sigma(i-j-1)}^\rho$, которые равномерно ограничены для всех $k \neq 0$, определяются из системы алгебраических уравнений, которую получим из (11), положив $\lambda = \alpha_\rho$ и $\mu = \varkappa_\sigma^\rho$. Подставив (12) в условие (8), для определения констант $C_{\sigma i}^\rho$, $D_{\sigma i}^\rho$ получим систему $2ns$ алгебраических уравнений, определитель $\Delta(k)$ которой определяется формулой

$$\Delta(k) = \prod_{\rho=1}^{q} (e^{-\lambda_\rho T} - e^{\lambda_\rho T})^{s_\rho} \Delta_1(k), \tag{13}$$

где

$$\Delta_1(k) = \sum_{\substack{|\alpha| = ns - s_0 \\ |\alpha_\rho| = l_\rho - s_\rho}} P_\alpha^0(k) \prod_{\rho=1}^{q} (e^{-\lambda_\rho T} - e^{\lambda_\rho T})^{\alpha_\rho'} (e^{-\lambda_\rho T} + e^{\lambda_\rho T})^{\alpha_\rho''} +$$

$$+ \sum_{\substack{|\gamma| = ns - s_0 \\ 0 \leq \gamma_\rho \leq l_\rho - s_\rho}} P_\gamma^1(k) \prod_{\rho=1}^{q} (e^{\lambda_\rho T})^{\gamma_\rho} \sum_{\substack{|\alpha| = ns - |\gamma| - s_0 \\ 0 \leq |\alpha_\rho| \leq l_\rho - s_\rho}} P_\alpha^2(k) \prod_{\rho=1}^{q} (e^{-\lambda_\rho T} - e^{\lambda_\rho T})^{\alpha_\rho'} \times$$

$$\times (e^{-\lambda_\rho T} + e^{\lambda_\rho T})^{\alpha_\rho''};$$

$$\alpha = (\alpha_1', \ldots, \alpha_q', \alpha_1'', \ldots, \alpha_q''); \quad \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q); \quad |\alpha| = \alpha_1' + \cdots + \alpha_q' +$$
$$+ \alpha_1'' + \cdots + \alpha_q'';$$
$$|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_q; \quad |\alpha_\rho| = \alpha_\rho' + \alpha_\rho''; \quad s_0 = s_1 + \cdots + s_q;$$
$$P_\alpha^0(k), \quad P_\gamma^1(k), \quad P_\alpha^2(k) \text{ —}$$

величины, зависящие от k, причем

$$\Delta_1(k) = O(|k|^{s[n(n-1)]}). \tag{14}$$

В дальнейшем однородные условия, отвечающие неоднородным условиям (2) и (8), будем обозначать соответственно (2*) и (8*).

Теорема 1. Для единственности решения задачи (1), (2) в пространстве $H_{t,2n}$ необходимо и достаточно, чтобы ни одно из уравнений

$$\Delta_1(k) = 0, \quad \mu_j^2 T^2(k, k) - \pi^2 l^2 = 0, \quad j = 1, \ldots, q \tag{15}$$

не имело нетривиальных решений в целых числах $k_1, \ldots, k_m, l$.

Необходимость. Если какое-то из уравнений (15) имеет нетривиальное решение в целых числах $k_1^0, \ldots, k_m^0, l^0$, то $\Delta(k^0) = 0$. Тогда существуют нетривиальные решения задачи (1), (2*), которые имеют вид $u^0(x, t) = u_{k^0}(t) e^{i(k^0, x)}$, где $u_{k^0}(t)$ — решение задачи (7), (8*), которое соответствует вектору k^0.

Достаточность. Предположим, что существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (1), (2) из пространства $H_{t,2n}$. Тогда вектор-функция

$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ принадлежит пространству $H_{t,2n}$ и является решением почти всюду задачи (1), (2*). Очевидно, что $u(x, t)$ разлагается в ряд Фурье вида (6). При этом ряд Фурье для производной $\frac{\partial^{|p|} u(x, t)}{\partial t^{2p_0} \partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_m^{p_m}}$ $(0 \leqslant |p| \leqslant 2n)$ совпадает с рядом, полученным почленным дифференцированием ряда (6) соответствующее число раз. Из равенства Парсеваля для компонент вектор-функций

$$\left.\frac{\partial^{2j} u(x, t)}{\partial t^{2j}}\right|_{t=0}, \quad \left.\frac{\partial^{2j} u(x, t)}{\partial t^{2j}}\right|_{t=T}, \quad A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$$

следует, что каждый из коэффициентов $u_k(t)$ функции $u(x, t)$ является решением соответствующей задачи (7), (8*). Если уравнение (5) не имеет нетривиальных решений в целых числах, то для всех векторов $k \neq 0$ $\Delta(k) \neq 0$. Отсюда, учитывая замечание 1, получаем, что $u_k(t) \equiv 0$ для всех векторов k. Из теоремы о единственности разложения функции в ряд Фурье следует, что $u(x, t) \equiv 0$, т. е. $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. Теорема доказана.

Решение задачи (1), (2) существует, если для всех целочисленных векторов k существует решение $u_k(t)$ задачи (7), (8) и функция $u(x, t)$, представляемая рядом (6), принадлежит пространству $H_{t,r}$ $(r \geqslant 2n)$.

Предположим, что имеет место единственность решения задачи (1), (2). Тогда константы $C^p_{\sigma i}$, $D^p_{\sigma i}$, которые входят в (12), однозначно определяются из условий (8) и представляются формулами

$$C^p_{\sigma i} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{s} \left(\varphi_{jmk} \frac{\Delta^{p\sigma i}_{jm}(k)}{\Delta(k)} + \varphi_{(n+j)mk} \frac{\Delta^{p\sigma i}_{(n+j)m}(k)}{\Delta(k)}\right), \tag{16}$$

$$D^p_{\sigma i} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{s} \left(\varphi_{jmk} \frac{\Delta^{(q+p)\sigma i}_{jm}(k)}{\Delta(k)} + \varphi_{(n+j)mk} \frac{\Delta^{(q+p)\sigma i}_{(n+j)m}(k)}{\Delta(k)}\right), \tag{17}$$

где $p = 1, \ldots, q$; $\sigma = 1, \ldots, s_p$; $i = 1, \ldots, \varkappa^p_\sigma$; $\Delta^{r\sigma i}_{lm}(k)$ — алгебраическое дополнение элемента определителя $\Delta(k)$, который лежит на пересечении $(m_1 + \cdots + m_{r-1} + \varkappa^1_r + \cdots + \varkappa^{\sigma-1}_r + i)$-й строки и $[(j-1)s + m]$-го столбца. При $|k| \to \infty$ меют место оценки

$$|\Delta^{r\sigma i}_{jm}(k)| = O(|k|^{s[n(n-1)]-j}), \quad |\Delta^{r\sigma i}_{(n+j)m}(k)| = O(|k|^{s[n(n-1)]-j}). \tag{18}$$

Вопрос о существовании решения задачи (1), (2), которое формально представляется рядом (6), где $u_k(t)$ определяются формулами (12), (16) и (17), связан с проблемой малых знаменателей, так как определитель $\Delta(k)$, будучи отличным от нуля, может принимать как угодно малые значения для бесконечного множества векторов k. Отметим, что

$$|\exp(\lambda_p T) - \exp(-\lambda_p T)| \geqslant \frac{T}{\pi} \sqrt{(k, k)}\, \left|\mu_p - \frac{l_k}{\sqrt{(k, k)}} \frac{\pi}{T}\right|, \tag{19}$$

где l_k — целое число, такое, что $\left|\mu_p \frac{T}{\pi} \sqrt{(k, k)} - l_k\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

Теорема 2. Пусть существуют такие положительные константы M_1, M_2 и натуральные числа r_1, r_2, что для всех (кроме конечного числа) совокупностей целых чисел $k_1, \ldots, k_m$, l выполняются неравенства

$$\left|\mu_p - \frac{l}{\sqrt{(k, k)}} \frac{\pi}{T}\right| \geqslant M_1 |k|^{-\left(r_1 + \frac{\varepsilon}{2s_0}\right)} \qquad (p = 1, \ldots, q), \tag{20}$$

$$|\Delta_1(k)| \geqslant M_2 |k|^{-\left(r_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \tag{21}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, и пусть $\varphi_j(x) \in \overline{H}_z$ $(j = 0, 1, \ldots, 2n-1$; $z = r + r_2 + r_1 s_0)$. Тогда существует решение задачи (1), (2), которое принадлежит пространству $H_{t,r}$ $(r \geqslant 2n)$ и является корректным относительно функций $\varphi_j(x)$.

Доказательство. Из формул (6), (12), (16) и (17) для нормы решения $u(x, t)$ получаем оценку

$$\|u\|_{H_{t,r}} \leqslant C \sum_{j=0}^{2n-1} \|\varphi_j\|_{\overline{H}_2}, \quad C = \mathrm{const} > 0. \tag{22}$$

Из неравенства (22) следует доказательство теоремы.

Замечание 2. Согласно лемме 2.6 работы [2], для почти всех в смысле меры Лебега чисел $\frac{T}{\pi}$ неравенства (20) выполняются для всех целочисленных векторов $k \neq 0$ и целых $l \neq 0$, если $r_1 = m + 2$.

Замечание 3. Если $\mu_p \frac{T}{\pi} \sqrt{(k, k)} < \frac{1}{2}$, т. е. в (19) $l_k = 0$ для всех (кроме конечного числа) векторов k, то в условии теоремы 2 вместо выполнения неравенств (20) нужно требовать выполнения неравенств

$$|\mu_p| \geqslant M_1 |k|^{-\left(r_1 + \frac{\varepsilon}{2s_0}\right)} \quad (p = 1, \ldots, q).$$

В качестве примера рассмотрим в области $D_3 = [0, T] \times \Omega_3$ задачу с условиями (2), где $n = 2$; $s = 3$; $m = 3$, для системы дифференциальных уравнений изотропного и однородного упругого тела, которая в матричной записи имеет вид

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \equiv \mu^* \Delta u(x, t) + (\lambda^* + \mu^*) \partial' \partial u(x, t) = \sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \tag{23}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения; t — время; λ^*, μ^* — постоянные Ламе; σ — плотность среды;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}; \quad \partial = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right);$$

$$\partial' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)'.$$

Система (23) нестрого гиперболическая: для произвольного действительного вектора $\eta \neq 0$ ее характеристическое уравнение

$$\det [\mu^2 E - B(\eta)] = 0 \tag{24}$$

имеет такие корни: $\mu_1(\eta) = \mu_2(\eta) = \sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}(\eta, \eta)}$, $\mu_3(\eta) = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma}(\eta, \eta)}$, $\mu_4(\eta) = \mu_5(\eta) = -\mu_1(\eta)$, $\mu_6(\eta) = -\mu_3(\eta)$. Для задачи (23), (2) справедливы такие результаты.

Теорема 3. Для единственности решения задачи (23), (2) в пространстве $H_{t,r}$ $(r \geqslant 2)$ необходимо и достаточно, чтобы ни одно из уравнений

$$\frac{\mu^*}{\sigma} T^2 (k, k) - \pi^2 l^2 = 0, \quad \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma} T^2 (k, k) - \pi^2 l^2 = 0 \tag{25}$$

не имело нетривиальных решений в целых числах k_1, k_2, k_3, l. Если выполнены условия единственности решения задачи (23), (2), то ее решение формально представляется рядом

$$u(x, t) = \sum_{|k| \geqslant 0} \sum_{p=1}^{3} \left(C_p R^p e^{i\mu_p(k)T} + C_{3+p} R^p e^{-i\mu_p(k)T}\right) e^{i(k, x)}, \tag{26}$$

где

$$R^1 = \left(-\frac{k_3}{\sqrt{(k, k)}}, 0, \frac{k_1}{\sqrt{(k, k)}}\right); \quad R^2 = \left(-\frac{k_2}{\sqrt{(k, k)}}, \frac{k_1}{\sqrt{(k, k)}}, 0\right);$$

$$R^3 = \left(\frac{k_1}{\sqrt{(k, k)}}, \frac{k_2}{\sqrt{(k, k)}}, \frac{k_3}{\sqrt{(k, k)}}\right);$$

$$C_p = \sum_{i=1}^{3} [(-1)^{p+i}\varphi_{0i} + (-1)^{p+i+1}\varphi_{1i}] \frac{\Delta_{ip}(k)\, e^{-i\mu_p(k)T}}{\Delta(k)\,(e^{-i\mu_p(k)T} - e^{i\mu_p(k)T})};$$

$$C_{3+p} = \sum_{i=1}^{3} [(-1)^{p+i+1}\varphi_{0i} + (-1)^{p+i}\varphi_{1i}] \frac{\Delta_{ip}(k)\, e^{i\mu_p(k)T}}{\Delta(k)\,(e^{-i\mu_p(k)T} - e^{i\mu_p(k)T})};$$

$\Delta(k) = \det \| R_i^p \|_{i,p=1}^{3} = -k_1 (k,\ k)^{-\frac{1}{2}}$; $\Delta_{ip}(k)$ — алгебраическое дополнение элемента определителя $\Delta(k)$, который лежит на пересечении i-й строки и p-го столбца.

Теорема 4. Пусть существует такая положительная константа M_0 и натуральное число r_0, что для всех (кроме конечного числа) совокупностей целых чисел k_1, k_2, k_3 и $l \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\left| \alpha_j - \frac{l^2}{(k,\ k)} \right| \geqslant M_0 |k|^{-(r_0+\varepsilon)} \quad (0 < \varepsilon < 1; \quad j = 1,\ 2), \tag{27}$$

где $\alpha_1 = \frac{\mu^* T^2}{\sigma\pi^2}$; $\alpha_2 = \frac{(\lambda^* + 2\mu^*)\, T^2}{\sigma\pi^2}$, и пусть $\varphi_j(x) \in \bar{H}_{r+r_0}$. Тогда существует решение задачи (23), (2), которое принадлежит пространству $H_{t,r}$ $(r \geqslant 2)$ и является корректным относительно функций $\varphi_j(x)$.

Замечание 4. Если $r_0 = 4$, то согласно теореме Туэ — Зигеля — Рота (см. [3, 6]) неравенства (27) будут выполняться для почти всех в смысле меры Лебега чисел α_1 и α_2 для всех векторов $k \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., Мир, 1966. 351 с.
2. *Елементи* якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними/ О. І. Бобик, П. І. Боднарчук, Б. Й. Пташник, В. Я. Скоробогатько. Київ, Наук. думка, 1972. 175 с.
3. *Бухштаб А. А.* Теория чисел М., Просвещение, 1966. 384 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Наука, 1966. 576 с.
5. *Пташник Б. И.* Об одной краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев, 1976, с. 66—71.
6. *Roth K. F.* Rational approximations to algebraic numbers.— Mathematica, 1955, 2, p. 1—20.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.09.77

УДК 517.944

Б. О. Салыга

АНАЛОГ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПО t КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной работе в области $R = [0,\ T] \times D_m$, где D_m — m-мерный тор, полученный отождествлением противоположных граней параллелепипеда $\{x : 0 \leqslant x_s \leqslant 2\pi,\ s = 1,\ \ldots,\ m\}$, изучен аналог многоточечной задачи для нестрого гиперболического по И. Г. Петровскому оператора с переменными по t коэффициентами, распадающегося на линейные множители первого порядка, и установлены условия существования, единственности и корректности классического решения и решения почти всюду рассматриваемой задачи, которые формулируются в теоретико-числовых терминах.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $x = (x_1,\ \ldots$ $\ldots,\ x_m)$, $k = (k_1,\ \ldots,\ k_m)$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_m|$, $(k,\ x) = k_1x_1 + \cdots$ $\cdots + k_mx_m$; $H_q\ (q = 0,\ 1,\ \ldots)$ — гильбертово пространство 2π-периодиче-