Для доказательства неравенства $S_1 > S_2$ достаточно показать, что $S_{11} > S_{22}$, ибо S_0 одинаковое (общее) для S_1 и S_2. Как видно из рис. 1,

$$S_{11} = \int\limits_{x_{a1}}^{x_{a2}} y(x)\,dx = y(x_{a2})(x_{a2} - x_{a1}) + \Delta S_{11},$$

$$S_{22} = \int\limits_{x_{b1}}^{x_{b2}} y(x)\,dx = y(x_{b2})(x_{b2} - x_{b1}) - \Delta S_{22}.$$

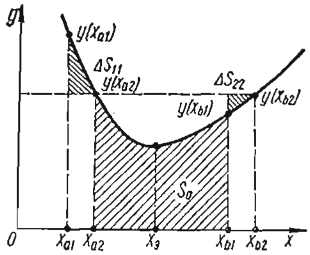


Рис. 1

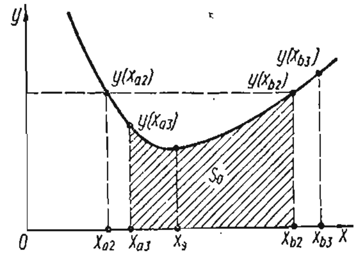


Рис. 2

Из условий теоремы $y(x_{a2}) = y(x_{b2})$. Очевидно, что $x_{a2} - x_{a1} = x_{b2} - x_{b1}$. Отсюда при любых значениях $\Delta S_{11} > 0$ и $\Delta S_{22} > 0$ можно утверждать, что $S_{11} > S_{22}$.

Утверждение, что

$$S_2 = \int\limits_{x_{a2}}^{x_{b2}} y(x)\,dx < S_3 = \int\limits_{x_{a3}}^{x_{b3}} y(x)\,dx$$

при условии $x_{b2} - x_{a2} = x_{b3} - x_{a3} = \text{const}$ (рис. 2), доказывается аналогично. Таким образом, минимальное значение интеграла S_i для $x_{bi} - x_{ai} = \text{const}$ существует при значениях x_{ai} и x_{bi}, для которых $y(x_{ai}) = y(x_{bi})$. Аналогично можно доказать приведенную теорему для функции $y(x)$, имеющей один максимум в рассматриваемом интервале. Оптимальной настройкой будет координата $x_{0i} = 0{,}5\,(x_{ai} + x_{bi})$.

г. Львов

Поступила в редколлегию
25.II 1975 г

УДК 534.1 : 531.221.3

Н. И. Здеорук

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

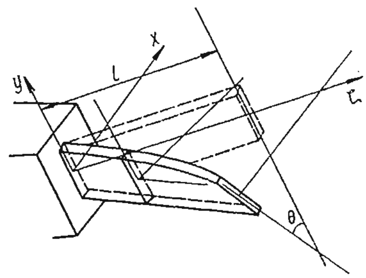
Построим характеристический определитель в виде характеристического ряда для задачи о малых колебаниях и устойчивости равновесия плоской формы изгиба узкой полосы прямоугольного сечения с абсолютно твердым телом массы M на свободном конце, загруженной следящим $\vec{K}$ и консервативным $\vec{L}$ моментами. Возмущенные движения такой полосы (рисунок) около плоской формы равновесия описываются системой уравнений [1, 2]

$$EI_y \frac{\partial^4 u(\zeta, t)}{\partial \zeta^4} + R \frac{\partial^2 \theta(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + m \frac{\partial^2 u(\zeta, t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$-GI_d \frac{\partial^2 \theta(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + R \frac{\partial^2 u(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + mr^2 \frac{\partial^2 \theta(\zeta, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

где $u(\zeta, t)$ — смещение в момент времени t центра произвольного сечения в направлении оси x; $\theta(\zeta, t)$ — угол поворота сечения относительно оси ζ; EI_y, GI_d — соответственно изгибная и крутильная жесткости сечения; m — распределенная масса полосы на единицу длины; r — радиус инерции сечения, отнесенный к центру изгиба.

Считаем, что следящий момент $\vec{K}$ в процессе движения составляет с осью oy угол $\theta(\zeta, t)$, оставаясь коллинеарным к плоскости xoy. Граничные условия на защемленном $\zeta = 0$ и свободном $\zeta = l$ концах имеют вид



$$u(0, t) = \theta(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial \zeta} = 0,$$

$$EI_y \frac{\partial^3 u(l, t)}{\partial \zeta^3} = R \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial \zeta} + M \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial u(l, t)}{\partial t},$$

$$EI_y \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial \zeta^2} = -R\mu\theta(l, t) - M\rho^2 \frac{\partial^3 u(l, t)}{\partial t^2} - b_2 \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t \partial \zeta}, \tag{2}$$

$$GI_d \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial \zeta} = R \frac{\partial u(l, t)}{\partial \zeta} - Md^2 \frac{\partial^2 \theta(l, t)}{\partial t^2} - b_3 \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial t},$$

где $\mu = \frac{L}{K + L}$; b_1, b_2, b_3 — параметры, характеризующие силы трения; $M\rho^2$, Md^2 — моменты инерции тела относительно осей oy и $o\zeta$ соответственно. Полагая в выражениях (1), (2) $u(\zeta, t) = \tilde{u}(\zeta) e^{\lambda t}$, $\theta(\zeta, t) = \tilde{\theta}(\zeta) e^{\lambda t}$, приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered} u^{\mathrm{IV}}(z) + R_1 \theta''(z) + m_1 \lambda^2 u(z) = 0, \\ \theta''(z) - R_2 u''(z) - m_2 \lambda^2 \theta''(z) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u(0) = \theta(0) = u'(0) = 0; \\ u'''(1) + R_1 \theta'(1) - (M_1 \lambda^2 + B_1 \lambda) u(1) = 0, \\ u''(1) + R_1 \mu \theta(1) + (M_2 \lambda^2 + B_2 \lambda) u'(1) = 0, \\ \theta'(1) - R_2 u'(1) + (M_3 \lambda^2 + B_3 \lambda) \theta(1) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\tilde{u}(zl) = u(z); \quad \tilde{\theta}(zl) = \theta(z); \quad z = \frac{\zeta}{l} \qquad (0 \leqslant z \leqslant 1);$$

$$R_1 = \frac{Rl^2}{EI_y}; \quad R_2 = \frac{R}{GI_d}; \quad m_1 = \frac{ml^4}{EI_y}; \quad m_2 = \frac{mr^2 l^2}{GI_d};$$

$$M_1 = \frac{Ml^3}{EI_y}; \quad M_2 = \frac{M\rho^2 l}{EI_y}; \quad M_3 = \frac{Md^2 l}{GI_d}; \quad B_1 = \frac{b_1 l^3}{EI_y};$$

$$B_2 = \frac{b_2 l}{EI_y}; \quad B_3 = \frac{b_3 l}{GI_d}.$$

Решение задачи (3), (4) ищем в виде

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(z) \lambda^{2n}, \quad \theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{2n}(z) \lambda^{2n}. \tag{5}$$

Удовлетворив системе уравнений (3) и граничным условиям (4) при $z = 0$, для определения функций $u_{2n}(z)$ и $\theta_{2n}(z)$ получим следующие условия:

$$\begin{gathered} u_0^{\mathrm{IV}}(z) + R_1 \theta_0''(z) = 0, \\ \theta_0''(z) - R_2 u_0''(z) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

$$
\begin{gathered}
u_0(0) = \theta_0(0) = u_0'(0) = 0; \\
u_{2n}^{\mathrm{IV}}(z) + R_1\theta_{2n}''(z) = -m_1u_{2n-2}(z), \\
\theta_{2n}''(z) - R_2u_{2n}''(z) = m_2\theta_{2n-2}(z), \qquad (7) \\
u_{2n}^{(i)}(0) = 0, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3; \quad \theta_{2n}^{(i)}(0) = 0, \qquad i = 0,\ 1.
\end{gathered}
$$

Решая последовательно задачи (6), (7), находим

$$
\begin{gathered}
u_0(z) = c_0\varphi(z) + c_1\varphi'(z), \\
\theta_0(z) = R_2u_0(z) + c_2z, \\
u_{2n}(z) = \int\limits_0^z \varphi(z-\xi)\, f_{2n-2}(\xi)\, d\xi, \qquad (8) \\
\theta_{2n}(z) = \int\limits_0^z (z-\xi)\, f_{2n-1}(\xi)\, d\xi + R_2u_{2n}(z),
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\varphi(z) = \frac{1}{k^2}\left(z - \frac{\sin kz}{k}\right); \\
f_{2n-2}(z) = -m_1u_{2n-2}(z) - R_1m_2\theta_{2n-2}(z); \\
f_{2n-1}(z) = m_2\theta_{2n-2}(z);
\end{gathered}
$$

$k = \dfrac{Rl}{\sqrt{EI_yGI_d}}$ — безразмерный параметр нагрузки; c_0, c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Требуя, чтобы решения (5) удовлетворяли граничным условиям на свободном конце, приходим к характеристическому ряду задачи

$$
\sum_{n=0}^{\infty} A_n^i(k,\ \mu,\ m,\ M_i,\ B_i)\,\lambda^n = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (9)
$$

При этом коэффициенты A_n определяются последовательно через значения функций $u_{2n}(z)$ и $\theta_{2n}(z)$ и их производных до третьего порядка включительно при $z = 1$. В частности,

$$
\begin{gathered}
A_0 = 1 - k^2F_2 + k^2\mu\Phi_2 + k^4\mu F_4, \\
A_1 = B_1F_4' + B_2F_2' + B_3(1 - k^2F_2 + k^2F_4'), \\
A_2 = \frac{m_2}{2}A_0 + M_1F_4' + M_2F_2' + M_3(1 - k^2F_2 + k^2F_4') - (m_1 + k^2m_2) \times \\
\times \left\{(\varphi''' + k^2\varphi')\int\limits_0^1 [\varphi''(1-\xi) + k^2\mu\varphi(1-\xi)]\,\varphi'(\xi)\,d\xi + (\varphi''' + k^2\mu\varphi') \times \right. \\
\times \int\limits_0^1 [\varphi'''(1-\xi) + k^2\mu\varphi'(1-\xi)]\,\varphi(\xi)\,d\xi - (\varphi^{\mathrm{IV}} + k^2\varphi'') \times \\
\times \int\limits_0^1 [\varphi''(1-\xi) + k^2\mu\varphi(1-\xi)]\,\varphi(\xi)\,d\xi - \\
\left. - (\varphi'' + k^2\mu\varphi)\int\limits_0^1 [\varphi'''(1-\xi) + k^2\varphi'(1-\xi)]\,\varphi'(\xi)\,d\xi\right\}.
\end{gathered}
$$

Функции $F_2(x)$, $F_4(x)$, $\Phi_2(x)$ выражаются через функцию $\varphi(x)$ известными формулами [3]. Заметим, что аналогично можно определять коэффициенты характеристического ряда и для других случаев закрепления.

Рассмотрим некоторые частные случаи. 1. Распределенная масса m полосы пренебрежимо мала по сравнению с массой M тела. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$\sum_{n=0}^{6} A_n \lambda^n = 0,$$

причем

$$A_0 = 1 - k^2 F_2 + k^2 \mu \Phi_2 + k^4 \mu F_4,$$
$$A_1 = B_1 F_4' + B_2 F_2' + B_3 (1 + k^2 F_4' - k^2 F_2),$$
$$A_2 = M_1 F_4' + M_2 F_2' + M_3 (1 + k^2 F_4' - k^2 F_2),$$
$$A_3 = B_1 (M_2 F_4 + M_3 F_4') + B_2 [M_1 F_4 + M_3 (k^2 F_4 + F_2')] +$$
$$+ B_3 [M_1 F_4' + M_2 (k^2 F_4 + F_2')],$$
$$A_4 = M_1 M_2 F_4 + M_2 M_3 (k^2 F_4 + F_2') + M_1 M_3 F_4',$$
$$A_5 = (B_1 M_2 M_3 + B_2 M_1 M_3 + B_3 M_1 M_2) F_4,$$
$$A_6 = M_1 M_2 M_3 F_4.$$

2. Система незагружена ($R = 0$). Тогда

$$A_0 = 1,$$
$$A_1 = \frac{B_1}{3} + B_2 + B_3,$$
$$A_2 = \frac{2}{4!} m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{M_1}{3} + M_2 + M_3,$$
$$A_3 = B_1 \left(\frac{8}{7!} m_1 + \frac{m_2}{6!} + \frac{2}{4!} M_2 + \frac{2M_3}{3!} \right) + B_2 \left(\frac{4}{5!} m_1 + \frac{m_2}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{4!} M_1 + M_3 \right) + B_3 \left(\frac{2}{4!} m_1 + m_2/3! + \frac{M_1}{3!} + M_2 \right).$$

В заключение отметим, что полученные выражения для коэффициентов характеристических рядов используются в методах двусторонних оценок [4, 5] определения частот колебаний и критических значений нагрузок как функций параметров рассмотренных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961. 339 с.
2. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1961. 507 с.
3. *Зорій Л. М.* Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами.— Допов. АН УРСР, 1968, № 12, с. 1072—1075.
4. *Зорій Л. М.* До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами.— Допов. АН УРСР, 1968, № 11, с. 992—995.
5. *Зорій Л. М., Ісаєв Ю. І.* Двосторонні оцінки критичних параметрів пружних систем при флатері.— Допов. АН УРСР, 1973, № 6, с. 529—531.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.XI 1974 г.