7. *Сеник П. М.* Обернення неповної Beta-функції.— УМЖ, 1969, 21, № 3, с. 325—333.
8. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., Изд-во иностр. лит., 1952. 256 с.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 15.XI 1975 г.

УДК 517.513 : 621.3.078.4

Б. Д. Денис, Я. С. Кезик

ОПТИМАЛЬНЫЕ НАСТРОЙКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Во многих случаях оптимизации технологических процессов или режимов работы производственных установок возникает задача нахождения оптимальных координат режима при наличии в объекте оптимизации возмущений, обусловливающих колебания этих координат. В этих условиях координаты режима, соответствующие экстремуму критерия оптимизации $x_э$, нельзя признать оптимальными, так как фактически объект никогда не работает с постоянными во времени значениями этих координат. Оптимальным следует признать такой режим, при котором среднее значение критерия оптимизации в условиях колебаний координат достигает экстремума. Задача нахождения оптимальных координат, которые определяют собой настройки системы регулирования процесса (когда критерий оптимизации является функцией одного аргумента — управляющего воздействия), может быть сформулирована следующим образом.

Пусть в некотором интервале $\Delta x = x_b - x_a$ задана функция $y(x)$, непрерывная и имеющая один экстремум. Необходимо найти x_{ai} и x_{bi}, для которых интеграл

$$S_i = \int\limits_{x_{ai}}^{x_{bi}} y(x)\,dx$$

при заданном $\Delta x = \text{const}$ принимает экстремальное значение. Для решения этой задачи докажем следующую теорему.

Теорема. *Если функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[x_a, x_b]$ и имеет один экстремум в любой точке $x_э$ интервала (x_a, x_b), то интеграл $S_i = \int\limits_{x_{ai}}^{x_{bi}} y(x)\,dx$ с пределами интегрирования $x_{ai} \geqslant x_a$ и $x_{bi} \leqslant x_b$ при $x_{bi} - x_{ai} = \text{const}$ достигает экстремального значения при равенстве функции $y(x)$ на границах интервала интегрирования: $y(x_{ai}) = y(x_{bi})$.*

Необходимо доказать, что

$$S_1 = \int\limits_{x_{a1}}^{x_{b1}} y(x)\,dx > S_2 = \int\limits_{x_{a2}}^{x_{b2}} y(x)\,dx$$

при условии $x_{b1} - x_{a1} = x_{b2} - x_{a2} = \text{const}$. На рис. 1 изображена функция $y(x)$. Абсциссы x_{a2} и x_{b2} выбраны так, что $y(x_{a2}) = y(x_{b2})$. Из этого рисунка видно, что площади S_1 и S_2 состоят из двух составляющих, т. е.

$$S_1 = \int\limits_{x_{a1}}^{x_{b1}} y(x)\,dx = \int\limits_{x_{a1}}^{x_{a_2}} y(x)\,dx + \int\limits_{x_{a2}}^{x_{b1}} y(x)\,dx = S_{11} + S_0,$$

$$S_2 = \int\limits_{x_{a2}}^{x_{b2}} y(x)\,dx = \int\limits_{x_{a2}}^{x_{b1}} y(x)\,dx + \int\limits_{x_{b1}}^{x_{b2}} y(x)\,dx = S_0 + S_{22}.$$

Для доказательства неравенства $S_1 > S_2$ достаточно показать, что $S_{11} > S_{22}$, ибо S_0 одинаковое (общее) для S_1 и S_2. Как видно из рис. 1,

$$S_{11} = \int\limits_{x_{a1}}^{x_{a2}} y(x)\,dx = y(x_{a2})(x_{a2} - x_{a1}) + \Delta S_{11},$$

$$S_{22} = \int\limits_{x_{b1}}^{x_{b2}} y(x)\,dx = y(x_{b2})(x_{b2} - x_{b1}) - \Delta S_{22}.$$

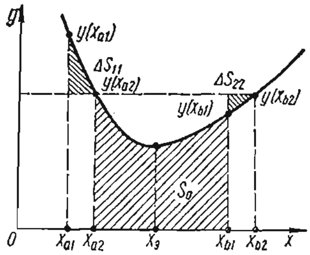

Рис. 1

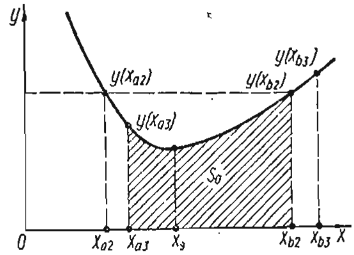

Рис. 2

Из условий теоремы $y(x_{a2}) = y(x_{b2})$. Очевидно, что $x_{a2} - x_{a1} = x_{b2} - x_{b1}$. Отсюда при любых значениях $\Delta S_{11} > 0$ и $\Delta S_{22} > 0$ можно утверждать, что $S_{11} > S_{22}$.

Утверждение, что

$$S_2 = \int\limits_{x_{a2}}^{x_{b2}} y(x)\,dx < S_3 = \int\limits_{x_{a3}}^{x_{b3}} y(x)\,dx$$

при условии $x_{b2} - x_{a2} = x_{b3} - x_{a3} = \mathrm{const}$ (рис. 2), доказывается аналогично. Таким образом, минимальное значение интеграла S_i для $x_{bi} - x_{ai} = \mathrm{const}$ существует при значениях x_{ai} и x_{bi}, для которых $y(x_{ai}) = y(x_{bi})$. Аналогично можно доказать приведенную теорему для функции $y(x)$, имеющей один максимум в рассматриваемом интервале. Оптимальной настройкой будет координата $x_{0i} = 0{,}5\,(x_{ai} + x_{bi})$.

г. Львов

Поступила в редколлегию
25.II 1975 г

УДК 534.1 : 531.221.3

Н. И. Здеорук

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Построим характеристический определитель в виде характеристического ряда для задачи о малых колебаниях и устойчивости равновесия плоской формы изгиба узкой полосы прямоугольного сечения с абсолютно твердым телом массы M на свободном конце, загруженной следящим $\vec{K}$ и консервативным $\vec{L}$ моментами. Возмущенные движения такой полосы (рисунок) около плоской формы равновесия описываются системой уравнений [1, 2]

$$EI_y \frac{\partial^4 u(\zeta, t)}{\partial \zeta^4} + R \frac{\partial^2 \theta(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + m \frac{\partial^2 u(\zeta, t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$-GI_d \frac{\partial^2 \theta(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + R \frac{\partial^2 u(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + mr^2 \frac{\partial^2 \theta(\zeta, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$