рассчитанными на основе рассмотренного выше вариационного процесса Ритца. Характерной особенностью распределения круговых напряжений в полукруге по сравнению со сплошным диском является смещение координаты нейтральной оси по направлению к контуру (с $0{,}59R$ до $0{,}77R$). Наблюдается также появление радиальных напряжений на прямолинейных участках боковой поверхности (того же знака, что и σ_0), величина которых несколько превышает уровень $\sigma_{\text{макс}}$ на криволинейной границе. Величина касательных напряжений не превосходит $0{,}1\sigma_0$.

На рис. 4 показано изменение напряжений σ_θ вдоль луча $\theta = 0$ (кривая *1*) и напряжений σ_r вдоль лучей $\theta = \pm\beta$ (кривые *2*) для некоторых значений β. Эти графики дают представление об изменении уровня максимальных напряжений в секторе при увеличении центрального угла 2β.

В заключение отметим, что результаты, приведенные на рис. 1, 3, 4, остаются в силе для более общего случая распределения температуры, чем описываемое выражением (13). А именно, они справедливы, если температура удовлетворяет уравнению

$$\Delta T = Q = \text{const} \tag{22}$$

при произвольных граничных условиях. В этом случае параметр σ_0 определяется выражением

$$\sigma_0 = \alpha E \frac{QR^2}{8}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964. 517 с.
2. *Гавурин М. К.* Лекции по методам вычислений. М., «Наука», 1971. 248 с.
3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1952. 695 с.
4. *Лабазин В. Г.* К вопросу о бигармонической задаче для кругового сектора.— Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1974, 52, № 3, с. 69—72.
5. *Либацкий Л. Л.* Всестороннее растяжение кругового диска с внешней радиальной трещиной.— ФХММ, 1969, 5, № 6, с. 758—760.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970. 512 с.
7. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963. 734 с.
8. *Hanson K. L., Horvay G.* Thermal Stresses in a Sector Prism.— In. Proc. Third US Nat. Congr. Appl. Mech., 1958, p. 313—322.
9. *Horvay G., Hanson K. L.* The Sector Problems.— J. Appl. Mech., 1957, 24, N 4, p. 574—581.
10. *Williams M. L.* Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular corners of Plates in Extension.— J. Appl. Mech., 1952, 19, N 4, p. 526—528.

г. Москва

Поступила в редколлегию 15.XII 1975 г.

УДК 62—50.5

П. М. Сеник, Б. И. Сокил

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, движение которой описывается автономными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} + \beta y^n &= \varepsilon F(x, y, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} c_k P_k(x, y), \\ \dot{y} - \alpha x^m &= \varepsilon G(x, y, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{l=1}^{M} d_l R_l(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

где x, y — фазовые координаты; α, β — некоторые положительные постоянные; $F(x, y, \varepsilon)$, $G(x, y, \varepsilon)$, $P_k(x, y)$, $R_l(x, y)$ — известные аналитические функции; n, m — числа вида $n = \frac{2\nu_1^{(1)}+1}{2\nu_2^{(1)}+1}$, $m = \frac{2\nu_1^{(2)}+1}{2\nu_{(2)}^{(2)}+1}$, $\nu_i^{(j)}$ $(i, j = 1, 2) = 0, 1, 2, \ldots$; c_k, d_l — постоянные параметры; ε — малый параметр.

Необходимо определить параметры c_k, d_l так, чтобы движение рассматриваемой системы происходило с заданными законами изменения амплитуды и частоты, а интеграл

$$J = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{2\pi}\left\{\left[\sum_{k=1}^{N} c_k P_k(x(a, \psi), y(a, \psi))\right]^2 + \left[\sum_{l=1}^{M} d_l R_l(x(a, \psi), y(a, \psi))\right]^2\right\} da d\psi, \tag{2}$$

где a — амплитуда; ψ — фаза колебаний, принимал минимальное значение. Для случая квазилинейной системы ($n = m = 1$) задача рассматривалась в работе [4].

Выражения сумм в правых частях уравнений (1) рассматриваются как аналитические аппроксимации характеристик элементов колебательной системы, поэтому значения чисел N и M определяются в процессе решения задачи. При решении указанной задачи будем считать, что из анализа движения системы известны значения амплитуды a_s и периода T_s произвольного размаха ее свободных колебаний, на основании которых, согласно работе [5], строим приближенные дифференциальные зависимости

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(a) + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \cdots, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\omega(a)$, $A_r(a)$, $B_r(a)$ — известные аналитические функции. Функцию $\omega(a)$ можно получить математическим подсчетом независимо от вида правых частей уравнений (1). Учитывая сказанное выше, а также вид правых частей уравнений (1) и зависимостей (3), приходим к выводу [1], что параметры c_k, d_l следует искать в виде

$$\begin{aligned} c_k &= c_k^{(1)} + \varepsilon c_k^{(2)} + \varepsilon^2 c_k^{(3)} + \cdots, \\ d_l &= d_l^{(1)} + \varepsilon d_l^{(2)} + \varepsilon^2 d_l^{(3)} + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

Решение системы (1) представим в виде

$$\begin{aligned} x &= u(a, \psi) + \varepsilon U_1(a, u) + \varepsilon^2 U_2(a, u) + \cdots, \\ y &= h(a, u) + \varepsilon V_1(a, u) + \varepsilon^2 V_2(a, u) + \cdots, \end{aligned} \tag{5}$$

где $u(a, \psi)$, $h(a, u)$, $U_r(a, u)$, $V_r(a, u)$ — периодические по ψ периода 2π функции, удовлетворяющие условиям

$$u(a, \psi)\big|_{\psi=r\pi} = (-1)^r a, \quad h(a, u)\big|_{u=\pm a} = 0; \tag{6}$$

$$U_r(a, u)\big|_{u=\pm a, 0} = V_r(a, u)\big|_{u=\pm a, 0} = 0. \tag{7}$$

Величины a, ψ в выражениях (5) связаны соотношениями (3). Заметим, что решение невозмущенной системы ($\varepsilon = 0$) (1) можно получить, согласно работе [6], с помощью Ateb-функций [7]. Для определения главных величин в выражениях (5) из уравнений (1) с учетом зависимостей (3), (4) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \psi} + l_0\beta\,[h(a, u)]^n = 0, \\ &\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \psi} - l_0\alpha\,[u(a, \psi)]^m = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где l_0 находим из условия 2π-периодичности функции $u(a, \psi)$, а отсюда находим

$$\psi = 2(r-1)\pi - \frac{1}{l_0\beta}\int\limits_a^u \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{n+1}{m+1}(a^{m+1} - u^{m+1})\right]^{-\frac{n}{n+1}} du \quad \text{при } a \geqslant u \geqslant -a,$$

$$2r\pi \leqslant \psi \leqslant (2r+1)\pi, \tag{9}$$

$$\psi = (2r-1)\pi + \frac{1}{l_0\beta}\int\limits_{-a}^u \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{n+1}{m+1}(a^{m+1} - u^{m+1})\right]^{-\frac{n}{n+1}} du \quad \text{при} -a \leqslant u \leqslant a,$$

$$(2r+1)\pi \leqslant \psi \leqslant 2(r+1)\pi,$$

$$h(a, u) = (-1)^{i+1}\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{n+1}{m+1}(a^{m+1} - u^{m+1})\right]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{10}$$

$$l_0 = \frac{1}{\pi\beta}\int\limits_{-a}^{a}\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{n+1}{m+1}(a^{m+1} - u^{m+1})\right]^{-\frac{n}{n+1}} du, \tag{11}$$

причем индекс $i = 1$ в выражении (10) соответствует интервалу $a \geqslant u \geqslant -a$, а $i = 2$ — интервалу $-a \leqslant u \leqslant a$.

Подставляя решения (5) в (1), учитывая формулы (3), (4), (9), (10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, для нахождения функций $U_r(a, u)$ и $V_r(a, u)$ получаем систему дифференциальных уравнений, первое приближение которой имеет вид

$$\begin{gathered}
-\beta[h(a, u)]^n \frac{\partial U_1}{\partial u} + \beta n[h(a, u)]^{n-1} V_1 = F_1(a, u) + \alpha_1^{(1)}(a, u) A_1(a) + \\
+ \beta_1^{(1)}(a, u) B_1(a) + \sum_{k=1}^{N} c_k^{(1)} P_k^{(1)}(a, u), \\
-\beta[h(a, u)]^n \frac{\partial V_1}{\partial u} - \alpha m[u(a, \psi)]^{m-1} U_1 = G_1(a, u) + \\
+ \alpha_1^{(2)}(a, u) A_1(a) + \beta_1^{(2)}(a, u) B_1(a) + \sum_{l=1}^{M} d_l^{(1)} R_l(a, u),
\end{gathered} \tag{12}$$

где

$$F_1(a, u) = F(u, h, 0); \quad G_1(a, u) = G(u, h, 0);$$

$$P_k^{(1)}(a, u) = P_k(u, h); \quad R_l^{(1)}(a, u) = R_l(u, h);$$

$$\alpha_i^{(1)}(a, u) = \left\{\frac{-1}{l_0}\frac{dl_0}{da}\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{u}[\eta(a, \bar{u})]^{-\frac{n}{n+1}} d\bar{u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha}{\beta} n a^m \int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{u}[\eta(a, \bar{u})]^{-\frac{2n+1}{n+1}} d\bar{u}\right\}[\eta(a, u)]^{\frac{n}{n+1}};$$

$$\alpha_2^{(2)}(a, u) = (-1)^i\left\{\frac{\alpha}{\beta}a^m[\eta(a, u)]^{-\frac{n}{n+1}} + \frac{\alpha}{\beta}u^m[\eta(a, u)]^{-\frac{n}{n+1}}\alpha_i^{(1)}(a, u)\right\};$$

$$\beta_2^{(1)}(a, u) = (-1)^i \beta l_0[\eta(a, u)]^{\frac{n}{n+1}}; \quad \beta_1^{(2)}(a, u) = -l_0 u^m;$$

$$\eta(a, u) = \frac{\alpha}{\beta}\frac{n+1}{m+1}(a^{m+1} - u^{m+1}),$$

а индекс i принимает те же значения, что и в формуле (10).

Из соотношений (12) получаем

$$\frac{n+1}{m+1}(u^{m+1} - a^{m+1})\frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} + u^m\frac{\partial U_1}{\partial u} - mnu^{m-1}U_1 = \Phi_1(a, u) +$$

$$+\alpha_1(a,\ u)A_1(a)+\beta_1(a,\ u)B_1(a)+\frac{1-n}{\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}P_k^{(1)}(a,\ u)+$$

$$+\frac{h(a,\ u)}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}\frac{\partial P_k^{(1)}}{\partial u}+\frac{n}{\alpha}\sum_{l=1}^{M}d_l^{(1)}R_l^{(1)}(a,\ u), \qquad (13)$$

где функция $\Phi_1(a,\ u)$ выражается через функции $F_1(a,\ u)$, $G_1(a,\ u)$, а

$$\alpha_1(a,\ u)=\alpha_1^{(2)}(a,\ u)+\frac{1-n}{n}\alpha_1^{(1)}(a,\ u)\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{1}{n}h(a,\ u)\frac{\partial\alpha_1^{(1)}}{\partial u},$$

$$\beta_1(a,\ u)=\beta_1^{(2)}(a,\ u)+\frac{1-n}{n}\beta_1^{(1)}(a,\ u)\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{1}{n}h(a,\ u)\frac{\partial\beta_1^{(1)}}{\partial u}. \qquad (14)$$

Частное решение неоднородного уравнения (13) имеет вид

$$U_1(a,\ u)=(a^{m+1}-u^{m+1})^{\frac{n}{n+1}}\left\{\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{u}(a^{m+1}-\bar{u}^{m+1})^{-\frac{2n+1}{n+1}}d\bar{u}\times\right.$$

$$\times\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{u}\left[\Phi_1^*(a,\ \bar{u})+\frac{1-n}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}P_k(A,\bar{u})\frac{\partial h}{\partial\bar{u}}+\frac{h(a,\ \bar{u})}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial\bar{u}}+\right.$$

$$\left.+\frac{n}{\alpha}\sum_{l=1}^{M}d_l^{(1)}R_l^{(1)}(a,\ \bar{u})\right]d\bar{u}-\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{u}\left[\left(\Phi_1^*(a,\ u)+\frac{1-n}{\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}P_k^{(1)}(a,u)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{h(a,\ u)}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}\frac{\partial P_k^{(1)}}{\partial u}+\frac{n}{\alpha}\sum_{l=1}^{M}d_l^{(1)}R_l^{(1)}(a,\ u)\right)\times$$

$$\left.\left.\times\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{u}(a^{m+1}-\bar{u}^{m+1})^{-\frac{2n+1}{n+1}}d\bar{u}\right]d\bar{u}\right\}, \qquad (15)$$

где $\Phi_1^*(a,\ u)=\frac{m+1}{n+1}(a^{m+1}-u^{m+1})^{-1}[\Phi_1(a,\ u)+\alpha_1(a,\ u)A_1(a)+\beta_1(a,u)\times$ $\times B_1(a)]$. Из выражения (15) с учетом условия (7) находим

$$\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{0}(a^{m+1}-u^{m+1})^{-\frac{2n+1}{n+1}}du\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{0}\left[\Phi_1^*(a,\ u)+\frac{1-n}{\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}P_k^{(1)}(a,\ u)+\frac{h(a,\ u)}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}\frac{\partial P_k^{(1)}}{\partial u}+\frac{n}{\alpha}\sum_{l=1}^{N}d_l^{(1)}R_l^{(1)}(a,\ u)\right]du-$$

$$-\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{0}\left\{\left[\Phi_1^*(a,\ u)+\frac{1-n}{\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}P_k^{(1)}(a,\ u)+\frac{h(a,\ u)}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}\frac{\partial P_k^{(1)}}{\partial u}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n}{\alpha}\sum_{l=1}^{M}d_l^{(1)}R_l^{(1)}(a,\ u)\right]\int\limits_{(-1)^{i+1}a}^{u}(a^{m+1}-\bar{u}^{m+1})^{-\frac{2n+1}{n+1}}d\bar{u}\right\}du=0. \qquad (16)$$

Рассмотрим в первом приближении интеграл (2). Заменив в нем x, y главными величинами выражений (5), с учетом формул (4), (9), (10) получим

$$J_1=\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a}\left\{\left[\sum_{k=1}^{N}c_k^{(1)}P_k^{(1)}(a,\ u)\right]^2+\left[\sum_{l=1}^{M}d_l^{(1)}R_l^{(1)}(a,\ u)\right]^2\right\}l_0\beta^{-1}[\eta(a,\ u)]^{-\frac{n}{n+1}}duda. \qquad (17)$$

Подберем N, M так, чтобы уравнение (16) удовлетворялось с помощью выбора $c_k^{(1)}$, $d_l^{(1)}$ при всех значениях a. Тогда относительно $c_k^{(1)}$, $d_l^{(1)}$ получим систему N_1 ($N_1 < N + M$) линейных алгебраических уравнений, решение которой связано с условием минимума интеграла (17). Определенные таким способом коэффициенты $c_k^{(1)}$, $d_l^{(1)}$ дают возможность с точностью до ε^2 построить оптимальную аналитическую аппроксимацию элементов нелинейной колебательной системы, амплитудно-частотная характеристика свободных колебаний которой известна.

Пример. Пусть в первом приближении относительно параметра ε движение колебательной системы описывается уравнениями

$$\dot{x} + \omega_0 y^3 = \varepsilon [c_1 x + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 x^2 y + c_5 x y^3],$$
$$\dot{y} - \omega_0 x = 0, \tag{18}$$

где ω_0 — известная постоянная. Такой выбор аппроксимации характеристик элементов соответствует, например, природе нелинейного демпфирования [2, 3], природе нелинейной характеристики тока в электрической цепи [8] и т. д.

Необходимо определить параметры $c_1, c_2, \ldots, c_5$ так, чтобы колебательный процесс системы (18) проходил согласно закону изменения амплитудно-частотной характеристики, заданной соотношениями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 + \alpha_2 a^2), \quad \frac{d\psi}{\partial t} = 0{,}3207 \pi a^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \beta_1 a^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

где α_1, α_2, β_1 — известные постоянные, а интеграл (2) принимал минимальное значение.

Решение невозмущенной системы (18) определяется соотношениями

$$\psi = 2(r-1)\pi - \frac{1}{l_0\omega_0} \int_a^u [2(a^2 - \bar{u}^2)]^{-\frac{3}{4}} d\bar{u} \quad \text{при } a \geqslant u \geqslant -a,$$
$$2r\pi \leqslant \psi \leqslant (2r+1)\pi, \tag{20}$$

$$\psi = (2r-1)\pi + \frac{1}{l_0\omega_0} \int_{-a}^u [2(a^2 - \bar{u}^2)]^{-\frac{3}{4}} du \quad \text{при } -a \leqslant u \leqslant a,$$
$$(2r+1)\pi \leqslant \psi \leqslant 2(r+1)\pi, \tag{21}$$
$$h(a, u) = (-1)^{i+1} [2(a^2 - u^2)]^{\frac{1}{4}}, \quad l_0 = \frac{3{,}1182}{\pi} a^{-\frac{1}{2}}.$$

Из уравнения (16) получаем

$$c_1 = -0{,}2586 c_3 - 0{,}7215 \beta_1, \quad c_2 = -6{,}9302 \alpha_1,$$
$$c_4 = -4{,}6556 c_5 + 0{,}6294 \alpha_1 + 15{,}7385 \alpha_2. \tag{22}$$

Решая задачу на условный экстремум, находим

$$c_1 = 2{,}1471 \alpha_1 + 0{,}0296 \alpha_2 - 0{,}5722 \beta_1, \quad c_4 = 125{,}87 \alpha_1 - 82{,}02 \alpha_2 - 1{,}8059 \beta_1,$$
$$c_3 = -8{,}3027 \alpha_1 - 0{,}1144 \alpha_2 - 0{,}5775 \beta_1,$$
$$c_5 = -26{,}9027 \alpha_1 + 20{,}9973 \alpha_2 - 0{,}3881 \beta_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974. 503 с.
2. *Грибов Н. Н.* Регулируемые амортизаторы радиоэлектронной аппаратуры. М., «Сов. радио», 1974. 144 с.
3. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., Изд-во иностр. лит., 1960. 777 с.
4. *Сеник П. М., Сокіл Б. І.* Про побудову оптимальної квазілінійної автономної програмно-коливної системи.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 11, с. 1014—1017.
5. *Сеник П. М.* Функция рассеяния энергии для материалов с нелинейным законом упругости.— Прикладная механика, 1965, № 2, с. 99—103.
6. *Сеник П. М.* Про Ateb-функції.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 1, с. 23—27.

7. *Сеник П. М.* Обернення неповної Beta-функції.— УМЖ, 1969, 21, № 3, с. 325—333.
8. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., Изд-во иностр. лит., 1952. 256 с.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 15.XI 1975 г.

УДК 517.513 : 621.3.078.4

Б. Д. Денис, Я. С. Кезик

ОПТИМАЛЬНЫЕ НАСТРОЙКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Во многих случаях оптимизации технологических процессов или режимов работы производственных установок возникает задача нахождения оптимальных координат режима при наличии в объекте оптимизации возмущений, обусловливающих колебания этих координат. В этих условиях координаты режима, соответствующие экстремуму критерия оптимизации $x_э$, нельзя признать оптимальными, так как фактически объект никогда не работает с постоянными во времени значениями этих координат. Оптимальным следует признать такой режим, при котором среднее значение критерия оптимизации в условиях колебаний координат достигает экстремума. Задача нахождения оптимальных координат, которые определяют собой настройки системы регулирования процесса (когда критерий оптимизации является функцией одного аргумента — управляющего воздействия), может быть сформулирована следующим образом.

Пусть в некотором интервале $\Delta x = x_b - x_a$ задана функция $y(x)$, непрерывная и имеющая один экстремум. Необходимо найти x_{ai} и x_{bi}, для которых интеграл

$$S_i = \int_{x_{ai}}^{x_{bi}} y(x)\,dx$$

при заданном $\Delta x = \text{const}$ принимает экстремальное значение. Для решения этой задачи докажем следующую теорему.

Теорема. *Если функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[x_a, x_b]$ и имеет один экстремум в любой точке $x_э$ интервала (x_a, x_b), то интеграл $S_i = \int_{x_{ai}}^{x_{bi}} y(x)\,dx$ с пределами интегрирования $x_{ai} \geqslant x_a$ и $x_{bi} \leqslant x_b$ при $x_{bi} - x_{ai} = \text{const}$ достигает экстремального значения при равенстве функции $y(x)$ на границах интервала интегрирования: $y(x_{ai}) = y(x_{bi})$.*

Необходимо доказать, что

$$S_1 = \int_{x_{a1}}^{x_{b1}} y(x)\,dx > S_2 = \int_{x_{a2}}^{x_{b2}} y(x)\,dx$$

при условии $x_{b1} - x_{a1} = x_{b2} - x_{a2} = \text{const}$. На рис. 1 изображена функция $y(x)$. Абсциссы x_{a2} и x_{b2} выбраны так, что $y(x_{a2}) = y(x_{b2})$. Из этого рисунка видно, что площади S_1 и S_2 состоят из двух составляющих, т. е.

$$S_1 = \int_{x_{a1}}^{x_{b1}} y(x)\,dx = \int_{x_{a1}}^{x_{a_2}} y(x)\,dx + \int_{x_{a2}}^{x_{b1}} y(x)\,dx = S_{11} + S_0,$$

$$S_2 = \int_{x_{a2}}^{x_{b2}} y(x)\,dx = \int_{x_{a2}}^{x_{b1}} y(x)\,dx + \int_{x_{b1}}^{x_{b2}} y(x)\,dx = S_0 + S_{22}.$$